Terminale S **Corrigé Devoir Surveillé 9** 20/05/19

Exercice 1 6 points

Partie A : Etude du cas $k = 1$

$f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

$f_1(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$.

2. f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1-x$.

Donc $f_1'(x) > 0$ si $x < 1$ et $f_1'(x) < 0$ si $x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. $g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

g_1 étant dérivable, on a pour tout réel,

$g_1'(x) = -1\mathrm{e}^{-x} - (x+1)(-\mathrm{e}^{-x}) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = f_1(x)$.

Donc g_1 est bien une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, $f_1(x) = 0 \iff x = 0$.

Le tableau de variations ci-dessus montre donc que $f_1(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $f_1(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. Comme la fonction est positive sur $]0\,;\,+\infty[$, elle l'est aussi sur $]0\,;\,\ln 10]$, donc l'aire cherchée est en unités d'aire égale à l'intégrale :

$$\int_0^{\ln 10} f_1(x)\,\mathrm{d}x = g_1(\ln 10) - g_1(0) = -(\ln 10 + 1)\mathrm{e}^{-\ln 10} + \mathrm{e}^0.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\ln 10} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 10}} = \dfrac{1}{10}$, l'aire est égale à : $1 - \dfrac{1+\ln 10}{10} = \dfrac{9}{10} - \dfrac{\ln 10}{10} \approx 0{,}67$ u. a.

Partie B : Propriétés graphiques

1. De façon évidente $f_k(0) = k \times 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$, donc les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par l'origine.

2. a. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f_k l'est aussi et :

$f_k'(x) = k\mathrm{e}^{-kx} - k \times kx\mathrm{e}^{-kx} = k\mathrm{e}^{-kx}(1-kx)$.

b. k strictement positif, et $\mathrm{e}^{-kx} > 0$, pour tout réel x, donc le signe de la dérivée $f_k'(x)$ est celui de $1-kx$.

Or $1 - kx < 0 \iff \dfrac{1}{k} < x\,;\ 1 - kx > 0 \iff \dfrac{1}{k} > x\,;\ 1 - kx = 0 \iff \dfrac{1}{k} = x$.

Il en résulte que la fonction f_k est : croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{k}\right[$, et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$;

elle admet donc un maximum en $\dfrac{1}{k}$: $f_k\left(\dfrac{1}{k}\right) = k \times \dfrac{1}{k} \times \mathrm{e}^{-k\times\frac{1}{k}} = 1\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$.

Conclusion : toutes les fonctions ont le même maximum e^{-1} pour $x = \dfrac{1}{k}$.

c. Le maximum pour $k = 2$ est obtenu pour $x = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, donc le maximum pour f_a est obtenue pour une valeur $\dfrac{1}{a}$ inférieure à 0,5 donc $a > 2$.

Remarque : en fait on peut penser que l'abscisse du maximum est à peu près égale à 0,1, ce qui correspond à $a = 10$.

d. Une équation de cette tangente est :
$y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0) \iff y = k(1-0)\mathrm{e}^0 x + 0 \iff y = kx.$

e. Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à $\dfrac{0{,}6}{0{,}2} = 3$.

Donc la courbe $\mathcal{C}_b$ correspond à la valeur $b = 3$.

Exercice 2 5 points

1. Pour $t = 0$ dans la représentation paramétrique de d_1, on obtient $x = 2$; $y = 3$ et $z = 0$ donc $A(2~;~3~;~0)$ appartient à d_1.

2. On sait que dans la représentation paramétrique d'une droite, les coefficients de x, y et z donnent les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite. On en déduit que $\overrightarrow{u_1}(1~;-1~;1)$ est un vecteur directeur de d_1 et $\overrightarrow{u_2}(2~;1~;0)$ est un vecteur directeur de d_2.

$\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires donc les deux droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} = 1 + 2 - 3 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_1}$, et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} = 2 - 2 + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_2}$.
$\overrightarrow{v}$ est bien orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a. Soit $\overrightarrow{n}(5~;4~;-1)$.
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = 5 \times 1 + 4 \times (-1) + (-1) \times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u_1}$.
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = 5 - 8 + 3 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à ce plan.
P passe par A donc une équation cartésienne de P est :
$5\,(x - x_A) + 4\,(y - y_A) - (z - z_A) = 0 \iff 5(x-2) + 4(y-3) - z = 0$
$\iff 5x + 4y - z - 22 = 0$: P a pour équation cartésienne : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b. On cherche l'intersection de d_2 et de P :
on injecte les expressions de x, y et z de la représentation paramétrique de d_2 dans l'équation cartésienne de P :
On obtient : $5(-5+2t') + 4(-1+t') - 5 - 22 = 0 \iff 14t' - 56 = 0 \iff t' = 4$.
On remplace t' par 4 : on obtient $x = -5 + 2 \times 4 = 3$; $y = -1 + 4 = 3$ et $z = 5$.
d_2 et P ont un seul point commun : $B(3~;~3~;~5)$.

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(1~;-2~;-3~)$, et passant par le point B $(3;~3;~5)$.

a. Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 - 2k \\ z = 5 - 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

b. On cherche si d_1 et Δ sont sécantes. Si c'est le cas, il existe t et k réels tels que :

$$\begin{cases} 2 + t = 3 + k \\ 3 - t = 3 - 2k \\ t = 5 - 3k \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 - 3k \\ 2 + 5 - 3k = 3 + k \\ 3 + 3k - 5 = 3 - 2k \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 - 3k \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

En remplaçant k par 1 ou t par 2, on obtient que les deux droites ont un seul point d'intersection : $C(4~;~1~;~2)$.

c. i. D'après la question (3.) la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonale aux droites d_1 et d_2.

ii. D'après la question (5b.) les droites d_1 et Δ sont sécantes en un point $C(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

iii. Par ailleurs , le point B$(3\,;3\,;5)$ appartient à la droite Δ par définition (5.) et à la droite d_2 d'après la question (4b.)

iv. Donc la droite Δ est sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites ce qui répond au problème posé.

Exercice 3 4 points

1. **Réponses a et c**

$P(X < 0{,}5) = \displaystyle\int_0^{0{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$, par définition.

Une primitive F de f est définie par $F(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 + x)$.

Donc $p(X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0) = \frac{1}{3}(0{,}5^3 + 0{,}5^2 + 0{,}5) \approx 0{,}292$.

2. **Réponse b**

$E(X) = \displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$, par définition.

$xf(x) = \frac{1}{3}(3x^3 + 2x^2 + x)$. Une primitive G est définie par $G(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$.

Donc $E(X) = G(1) - G(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{3} \times \frac{23}{12} = \frac{23}{36}$.

3. **Réponse d**

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{d}\,(1,\ 2,\ 3)$, un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{d'}\,(1,\ 1,\ -1)$. $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d'} = 1 + 2 - 3 = 0$.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc orthogonales.

Aussi par élimination : la a. est fausse car les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, b. est fausse car il n'y a pas de point d'intersection et c. est fausse car C n'est pas sur D.

4. **Réponse c**

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1{,}1, -1)$.

Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$.

Ce qui entraîne que ce plan est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.

Exercice 4 4 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A :

1. La formule à saisir dans la cellule B4, puis à recopier vers le bas, permettant d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B est `= 5*B3/4 - B2/4`
2. On complète le tableau donné dans le texte avec des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n :

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers le nombre 7.

Partie B : Etude de la suite

1. a. $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{4}u_{n+1} = \dfrac{5}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = v_n$ donc la suite (v_n) est constante.

b. La suite (v_n) est constante, donc pour tout n, $v_n = v_0 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = 6 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{4}$.

Donc, pour tout n, $u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = \dfrac{21}{4}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4}$.

2. a. Soit la propriété $u_n < u_{n+1} < 15$.

- **Initialisation**

  $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ donc $u_0 < u_1 < 15$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose que pour $n \geqslant 0$, $u_n < u_{n+1} < 15$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $u_n < u_{n+1} < 15 \implies \dfrac{1}{4}u_n < \dfrac{1}{4}u_{n+1} < \dfrac{15}{4} \implies \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4} < \dfrac{1}{4}u_{n+1} + \dfrac{21}{4} < \dfrac{15}{4} + \dfrac{21}{4}$

  ce qui équivaut à $u_{n+1} < u_{n+2} < \dfrac{36}{4}$, soit $u_{n+1} < u_{n+2} < 9$.

  On en déduit que $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$ donc que la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$; on a démontré qu'elle était héréditaire pour $n \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b.
- On a démontré que pour tout n, $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- On a démontré que pour tout n, $u_n < 15$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. a. Pour tout n, $w_n = u_n - 7$ donc $u_n = w_n + 7$.

- $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4} - 7 = \dfrac{1}{4}\big(w_n + 7\big) - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4}w_n + \dfrac{7}{4} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4}w_n$
- $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

Donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = -4$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

b. On en déduit que, pour tout n :

$w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = -4 \times \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = w_n + 7$ donc, pour tout n, $u_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc, d'après les propriétés des limites des suites géométriques, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$.

Exercice 4 5 points Enseignement de spécialité

1. a. $\left\{\begin{array}{l c r}b_{n+1}&=&0,3b_n+0,5c_n\\c_{n+l}&=&-0,5b_n+1,3c_n\end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l c r c r c r}b_1&=&0,3b_0+0,5c_0&=&0,3\times 1\,000+0,5\times 1\,500&=&1\,050\\c_1&=&-0,5b_0+1,3c_0&=&-0,5\times 1\,000+1,3\times 1\,500&=&1\,450\end{array}\right.$

Donc $U_1=\begin{pmatrix}1\,050\\1\,450\end{pmatrix}$.

$\left\{\begin{array}{l c r c r c r}b_2&=&0,3b_1+0,5c_1&=&0,3\times 1\,050+0,5\times 1\,450&=&1\,040\\c_2&=&-0,5b_1+1,3c_1&=&-0,5\times 1\,050+1,3\times 1\,450&=&1\,360\end{array}\right.$ donc $U_2=\begin{pmatrix}1\,040\\1\,360\end{pmatrix}$.

b. On sait que $\left\{\begin{array}{l c r}b_{n+1}&=&0,3b_n+0,5c_n\\c_{n+l}&=&-0,5b_n+1,3c_n\end{array}\right.$ ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix}b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3&0,5\\-0,5&1,3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_n\\c_n\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $U_{n+1}=AU_n$.

2. a. On doit déterminer le réel a pour que $PQ=QP=I$.

$PQ=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times a&1\times 0+0\times 1\\1\times 1+1\times a&1\times 0+1\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1+a&1\end{pmatrix}$

$PQ=I\iff 1+a=0\iff a=-1$; donc $Q=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

On vérifie : $QP=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times 1&1\times 0+0\times 1\\-1\times 1+1\times 1&-1\times 0+1\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Donc la matrice $Q=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

b. Soit la propriété $A^n=PT^nQ$.

- **Initialisation**

  On a admis que $A=PTQ$ ce qui s'écrit $A^1=PT^1Q$; la propriété est donc vraie pour $n=1$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n\geqslant 1$, c'est-à-dire $A^n=PT^nQ$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $A^{n+1}=A\times A^n=\big(PTQ\big)\big(PT^nQ\big)=P\big(T(QP)T^n\big)Q$

  Les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre donc $QP=I$.

  Alors : $T(QP)T^n=TIT^n=TT^n=T^{n+1}$, et on peut donc écrire $A^{n+1}=PT^{n+1}Q$ ce qui démontre que la propriété est vraie au rang $n+1$.

  Conclusion

  On a vérifié la propriété pour $n=1$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n\geqslant 1$. D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout n non nul, $A^n=PT^nQ$.

c. Soit la propriété $T^n=\begin{pmatrix}0,8^n&0,5n\times 0,8^{n-1}\\0&0,8^n\end{pmatrix}$ où $T=\begin{pmatrix}0,8&0,5\\0&0,8\end{pmatrix}$.

- **Initialisation**

  Pour $n=1$, $\begin{pmatrix}0,8^1&0,5\times 1\times 0,8^{1-1}\\0&0,8^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8&0,5\\0&0,8\end{pmatrix}=T$

  Donc la propriété est vérifiée pour $n=1$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie pour $n \geqslant 1$ c'est-à-dire $T^n = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \\ 0 & 0{,}8^n \end{pmatrix}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $$T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \\ 0 & 0{,}8^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
  $$= \begin{pmatrix} 0{,}8^n \times 0{,}8 + 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \times 0 & 0{,}8^n \times 0{,}5 + 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \times 0{,}8 \\ 0 \times 0{,}8 + 0{,}8^n \times 0 & 0 \times 0{,}5 + 0{,}8^n \times 0{,}8 \end{pmatrix}$$
  $$= \begin{pmatrix} 0{,}8^{n+1} & 0{,}8^n \times 0{,}5 + 0{,}5n \times 0{,}8^n \\ 0 & 0{,}8^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8^{n+1} & 0{,}5\,(n+1) \times 0{,}8^n \\ 0 & 0{,}8^{n+1} \end{pmatrix}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  On a vérifié que la propriété était vraie au rang $n = 1$. On a démontré qu'elle était héréditaire pour tout $n \geqslant 1$. D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, $T^n = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \\ 0 & 0{,}8^n \end{pmatrix}$.

3. Pour $N = 40$ donc au bout de 40 ans, on a à la fois $B \leqslant 2$ et $C \leqslant 2$, donc le nombre de buses et de campagnols devient dangereusement réduit.

4. a. D'après la matrice U_n, on a $b_n = 1\,000 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n$ et $c_n = 1\,500 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n$, pour tout n.

De plus, b_n et c_n correspondent respectivement aux nombres de buses et de campagnols donc ce sont des nombres positifs : $0 \leqslant b_n$ et $0 \leqslant c_n$.

On sait que $n \leqslant 10 \times 1{,}1^n$, donc $1\,000 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n \leqslant 1\,000 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} \times 10 \times 1{,}1^n \times 0{,}8^n$ donc on peut dire que $b_n \leqslant 1\,000 \times 0{,}8^n + 3\,125 \times 0{,}88^n$.

D'après les propriétés des limites des suites géométriques, comme $-1 < 0{,}8 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}8\right)^n = 0$, et comme $-1 < 0{,}88 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}88\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1\,000 \times 0{,}8^n + 3\,125 \times 0{,}88^n\right) = 0$.

On sait que $0 \leqslant b_n \leqslant 1\,000 \times 0{,}8^n + 3\,125 \times 0{,}88^n$; d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

Par un raisonnement similaire, on démontre que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.

b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus, ce qui veut dire que $c_n > 50$.

Avec le modèle étudié, le nombre de campagnols tend vers 0 donc deviendra plus petit que 50 à partir d'un certain rang.

A la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice ne paraît donc pas cohérent.