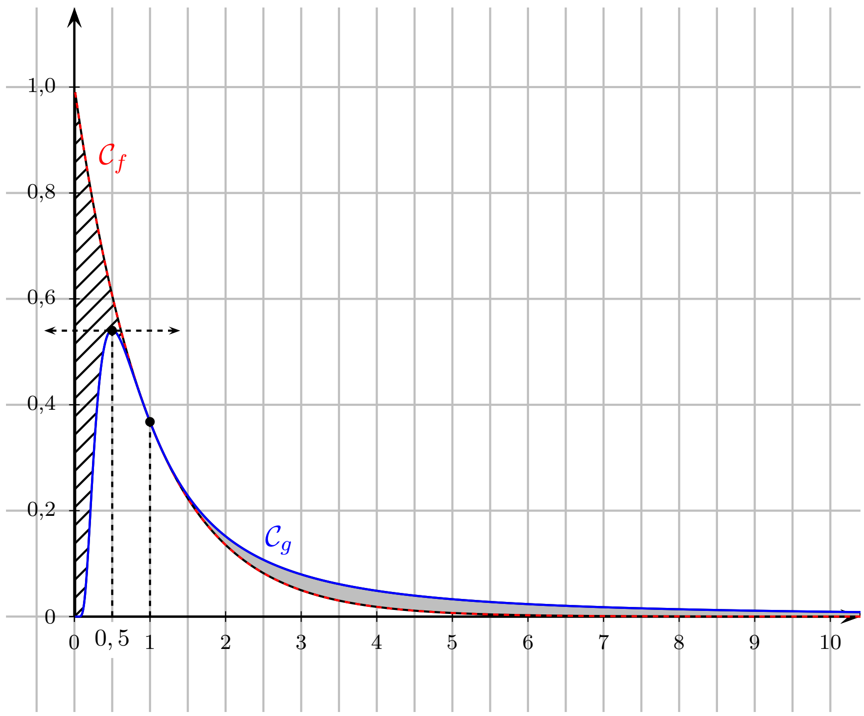
Terminale S | **Corrigé Devoir Surveillé 7** | 25/03/19

Durée : 3 heures

EXERCICE 1 (8 points)

Partie A – Conjectures graphiques



1. D'après le graphique, on peut dire qu'une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $x = 1$.
2. D'après le graphique, on peut dire qu'une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $x = 0,5$.

Partie B – Etude de la fonction g

1. On cherche la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \mathrm{e}^X = 1 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$$

On peut donc dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \ln\big(g(x)\big)$.

   a. Pour tout nombre réel x strictement positif,

$$h(x) = \ln\big(g(x)\big) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) - \ln\left(x^2\right) = -\frac{1}{x} - 2\ln(x) = \frac{-1-2x\ln x}{x}.$$

b. On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$. On en déduit que

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(-1-2x\ln x\right) = -1$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{-1-2x\ln x}{x} = -\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = -\infty$.

c. Pour tout $x>0$, $h(x) = \ln\left(g(x)\right)$ donc $g(x) = \mathrm{e}^{h(x)}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = -\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \mathrm{e}^{h(x)} = 0 \text{ ce qui veut dire que } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = 0.$$

3. Pour tout $x>0$, $g'(x) = \left(-\dfrac{2x}{x^4}\right)\times \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\times\left(\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(1-2x\right)}{x^4}$.

4. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^4>0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $1-2x$:

- la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,0,5]$;
- la fonction g est strictement décroissante sur $[0,5\,;\,+\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

1. Soit A le point de coordonnées $\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$.
$f(x_{\mathrm{A}}) = f(1) = \mathrm{e}^{-1} = y_{\mathrm{A}}$ donc le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
$g(x_{\mathrm{A}}) = g(1) = \dfrac{1}{1^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1}} = \mathrm{e}^{-1} = y_{\mathrm{A}}$ donc le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}_g$.
Donc le point A est un point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs.
La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a pour primitive la fonction $x\mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.
La fonction g est définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ de la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ d'après ce qui a été vu précédemment ; elle a donc pour primitive la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ c'est-à-dire $x\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
La fonction $\left(f-g\right)$ a donc pour primitive la fonction $K : x\mapsto -\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x &= K(b)-K(a) = \left(-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}.\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente,

$$\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{\frac{-1}{1}} = \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-2\mathrm{e}^{-1}.$$

$\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}^{-a} = \mathrm{e}^{0} = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{a\to 0\\a>0}} -\dfrac{1}{a} = -\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\substack{a\to 0\\a>0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} = 0$$

On peut donc déduire que $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\a>0}} \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} = 1$ et donc que $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x = 1-2\mathrm{e}^{-1}$.

4. Sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ donc $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$ représente l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. C'est l'aire de la région hachurée sur le graphique.

Sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$, et les droites $x=1$ et $x=b$ quand b tend vers $+\infty$. C'est l'aire de la région grisée sur le graphique.

On peut donc dire que ces deux aires sont égales.

EXERCICE 2 (7 points)

Partie A

1. D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la courbe admet la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x)>0 \iff \frac{1-\ln(x)}{x^2}>0 \iff 1-\ln(x)>0 \iff 1>\ln(x) \iff \mathrm{e}>x \iff x<\mathrm{e}$$

Donc la fonction f est : strictement croissante sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$;
strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1. $u_0=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

$\dfrac{1}{x}\ln(x)$ est de la forme $u'u$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$; donc la fonction f a pour primitive sur $[1\ ;\ 2]$ la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{1}{2}\big[\ln(x)\big]^2$.

Donc $u_0=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(1)=\frac{1}{2}\big[\ln(2)\big]^2-\frac{1}{2}\big[\ln(1)\big]^2=\frac{1}{2}\big[\ln(2)\big]^2$

La fonction f est positive sur $[1\ ;\ 2]$ donc $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

2. Pour tout x de $[1\ ;\ 2]$: $1\leq x\leq 2$

$\iff \ln(1)\leq\ln(x)\leq\ln(2)$ car la fonction ln est croissante sur $[1\ ;\ 2]$

$\iff 0\leq\ln(x)\leq\ln(2)$

$\iff 0\leq\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leq\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$ car $\dfrac{1}{x^{n+1}}>0$ sur $[1\ ;\ 2]$

3. On a $0\leq\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leq\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$\displaystyle\int_1^2 0\,\mathrm{d}x\leq\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\mathrm{d}x\leq\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\mathrm{d}x$ ou encore $0\leq u_n\leq\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\mathrm{d}x$.

On calcule $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\mathrm{d}x=\ln(2)\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x$.

Pour $n>0$, la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x^{n+1}}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto-\dfrac{1}{nx^n}$.

Donc $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{n\times 2^n}\right)-\left(-\frac{1}{n\times 1^n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n\times 2^n}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

Donc, pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

4. On cherche la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

On a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ pour tout n, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0$; on peut donc dire, d'après le théorème des gendarmes, que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

EXERCICE 3 (5 points)

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$.

$z_1 = 1 - \dfrac{1}{z_0} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - 2 = -1$; $z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$; ensuite on retrouve $z_4 = \dfrac{1}{2}$, $z_5 = -1$ et $z_6 = 2$.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \text{i}$.

$z_1 = 1 - \dfrac{1}{\text{i}} = 1 + \text{i}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{1+\text{i}} = 1 - \dfrac{1-\text{i}}{1+1} = \dfrac{2-1+\text{i}}{2} = \dfrac{1+\text{i}}{2}$;

$z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{\frac{1+\text{i}}{2}} = 1 - \dfrac{2}{1+\text{i}} = \dfrac{1+\text{i}-2}{1+\text{i}} = \dfrac{-1+\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{(-1+\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})} = \dfrac{-1+1+\text{i}+\text{i}}{1+1} = \text{i} = z_0$; ensuite on retrouve $z_4 = z_1 = 1 + \text{i}$, puis $z_5 = \dfrac{1+\text{i}}{2}$ et $z_6 = \text{i}$.

c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.

$z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_2 - 1}{z_2}$ d'où $z_3 z_2 = z_2 - 1 = -\dfrac{1}{z_1}$ donc $z_3 z_2 z_1 = -1$, et de même $z_2 z_1 z_0 = -1$, donc $z_3 z_2 z_1 = z_2 z_1 z_0$, soit $z_3 = z_0$. ($z_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

d. Des résultats des questions précédentes, on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$, pour $n \in \mathbb{N}$.

On démontre cette conjecture par récurrence sur n :

- **Initialisation :** on a bien $z_{3\times 0} = z_0$.
- **Hérédité :** remarquons que $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n} \iff \dfrac{1}{z_n} = 1 - z_{n+1} \iff z_n = \dfrac{1}{1 - z_{n+1}}$.

Supposons que pour un entier quelconque $p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$, alors $z_{3(p+1)} = z_{3p+3}$ et

$$z_{3p+3} = 1 - \frac{1}{z_{3p+2}} = \frac{z_{3p+2} - 1}{z_{3p+2}} = \frac{-\frac{1}{z_{3p+1}}}{1 - \frac{1}{z_{3p+1}}} = \frac{-1}{z_{3p+1} - 1} = \frac{1}{1 - z_{3p+1}} = z_{3p} = z_0.$$

- **Conclusion :** on a donc démontré que $z_{3\times 0} = z_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $z_{3p} = z_0$, alors $z_{3(p+1)} = z_0$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

2. Comme $2\,016 = 3 \times 672$, on a d'après la question précédente $z_{2\,016} = z_0 = 1 + \text{i}$.

3. On a $z_0 = z_1 \iff z_0 = 1 - \dfrac{1}{z_0}$ (avec $z_0 \neq 0$) ou encore $z_0^2 = z_0 - 1 \iff z_0^2 - z_0 + 1 = 0$.

On calcule $\Delta = 1 - 4 = -3$ et on obtient deux solutions complexes conjuguées :

$z_0 = \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z_0 = \frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il y a donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_1 = z_0$.

Dans ces deux cas, $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$, et ainsi de suite, donc les suites (z_n) sont constantes.