Terminale S | **DEVOIR SURVEILLE 7** | 25/03/19

Durée : 3 heures

Calculatrices autorisées.

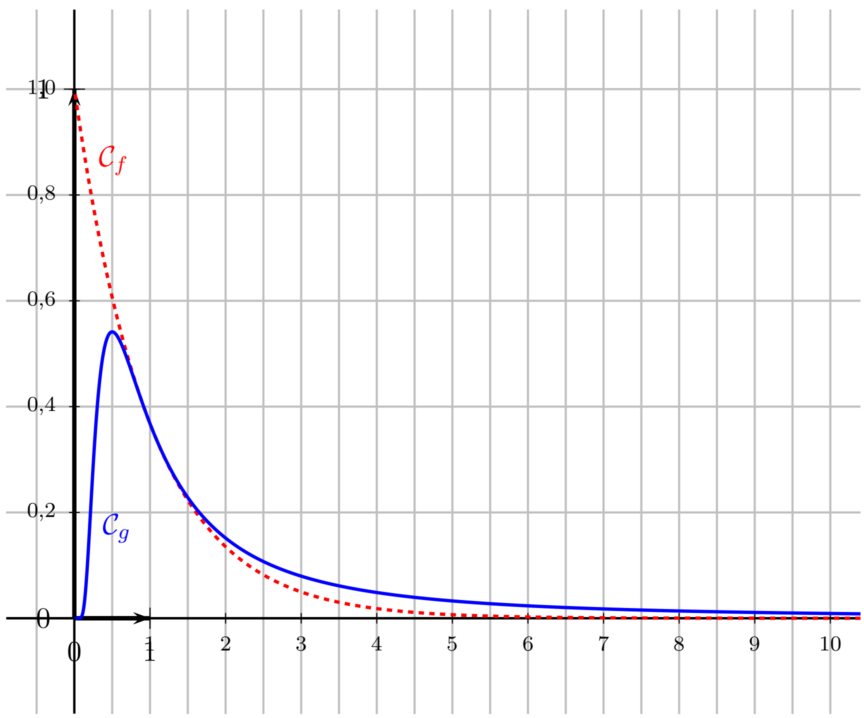
EXERCICE 1 (8 points)

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-dessous :



Partie A – Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B – Etude de la fonction g

1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \ln\big(g(x)\big)$.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}.$$

b. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0. On pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.

c. En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(1-2x\right)}{x^4}.$$

4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

1. Démontrer que la point A de coordonnées $\left(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$ est un point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} - \mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}.$$

4. On admet que

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Interpréter graphiquement cette égalité.

EXERCICE 2 (7 points)

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel $x \geq 1$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

3. Etudier les variations de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 (5 points)

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

c. Dans cette question on revient au cas général. Prouver que pour tout nombre complexe z_0 différent de 0 et de 1, on $z_3 = z_0$.

d. Dans le cas général où z_0 est un complexe donné, que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?

Prouver cette conjecture.

2. Déterminer $z_{2\,016}$ dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?