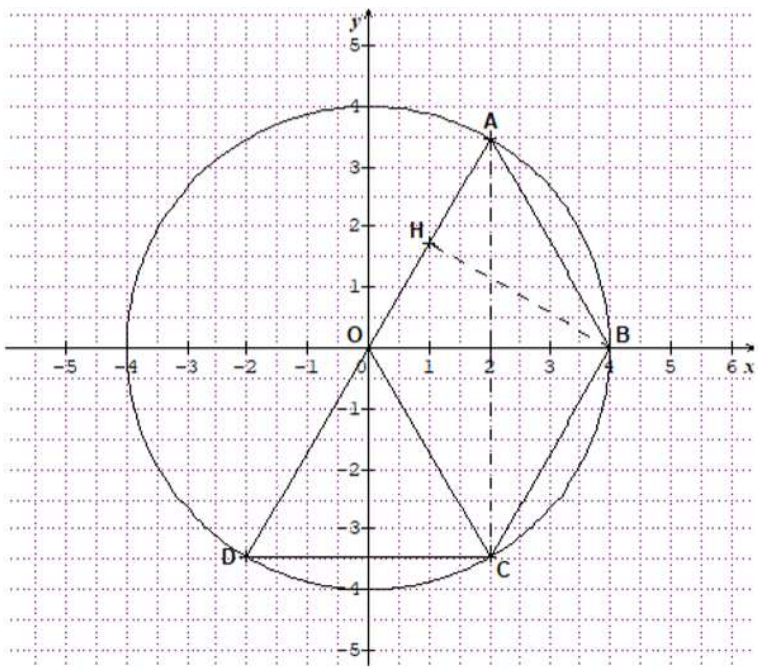
Terminale S $\boxed{\text{Corrigé devoir surveillé 5}}$ 20/01/20

Exercice 1 8 points

Première partie

Dans cette partie, on suppose que $a = 2$.

1. $a = 2$ donc $z_A = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Calcul du module : $|z_A| = \sqrt{4+12} = 4$.
   Pour écrire la forme exponentielle, il faut calculer un argument de z_A, soit θ.
   $\cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
   La forme exponentielle de z_A est $4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. Par symétrie, $z_C == 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ (forme algébrique) et $z_C = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ (forme exponentielle).
3. **QCM** Réponse C.
   Par symétrie, $|z_D| = |z_A|$ et $\arg(z_D) = \arg(z_A) - \pi = -\frac{2\pi}{3}$, donc $z_D = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
4. Figure :



5. $OA = |z_A| = 4 = |z_B| = OB$. $AB = |z_B - z_A| = |2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}| = 4$. Donc le triangle OAB est équilatéral. Par symétrie, $OABC$ est un losange donc (OA) et (BC) sont parallèles d'où (DA) et (BC) sont parallèles et le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.
   On peut aussi calculer $z_A - z_D = 2z_A = z_B - z_C$ ce qui prouve que $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{CB}$ et (OA) et (BC) parallèles.
6. $[HB]$ est la hauteur issue de B du triangle équilatéral OAB donc (HB) est une médiane issue de B ce qui prouve que H est le milieu de $[OA]$ donc $z_H = \frac{1}{2}z_A$.
   Forme algébrique de z_H : $z_H = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
7. **QCM** Réponse C.
   Avec les différentes symétries, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à trois fois l'aire du triangle OAB qui vaut $\dfrac{4 \times 2\sqrt{3}}{2}$, donc $\mathcal{A} = 12\sqrt{3}$.

Deuxième partie

8. $\ell_1 = OB = 4$.
$\ell_2 = AC = |z_A - z_C| = |4\text{i}\sqrt{a^2-1}| = 4\sqrt{a^2-1}$.

9. Le quadrilatère $OABC$ est un carré si $\ell_1 = \ell_2$, soit $\sqrt{a^2-1} = 1$ ce qui donne $a^2 = 2$ soit $a = \sqrt{2}$ puisque $a > 1$.

Troisième partie

Soient (E) et (E') les équations d'inconnue complexe z :

$$(E) : \quad z^2 - 4z + 4a^2 = 0 \qquad\qquad (E') : \quad z^3 - 4z^2 + 4a^2 z = 0$$

10. $\Delta = 16 - 16a^2 = 16(1-a^2)$. Comme $a > 1$ alors $1 - a^2 < 0$ et l'équation (E) admet deux racines complexes non réelles.

11. $z_1 = \dfrac{4 - \text{i}\sqrt{16(a^2-1)}}{2} = 2 - 2\text{i}\sqrt{a^2-1} = z_C$ et $z_2 = 2 + 2\text{i}\sqrt{a^2-1} = z_A$.

12. $z^3 - 4z^2 + 4a^2 z = z(z^2 - 4z + 4a^2)$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
Donc l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions de l'équation (E') est donc $\{0, z_A, z_C\}$.

Exercice 2 **6 points**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. Méthode 1

   a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\text{e}^x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = \left(\text{e}^{2x} - 2 \times \text{e}^x \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{3}{4} = \text{e}^{2x} - \text{e}^x + 1 = g(x)$.

   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\text{e}^x - \dfrac{1}{2}\right)^2 > 0$, donc $g(x) > 0$.

2. Méthode 2

   a. $\Delta = -3$, donc le polynôme n'a pas de racine sur $\mathbb{R}$, donc ne s'annule pas et garde un signe constant, celui du coefficient de X^2, soit $X^2 - X + 1 > 0$ pour tout réel X.

   b. On pose $X = \text{e}^x$: alors $g(x) = X^2 - X + 1$, et on en déduit que $g(x) > 0$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \dfrac{3\text{e}^x}{\text{e}^x + 1}$.

1. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1 - \dfrac{3\text{e}^x \times (\text{e}^x + 1) - 3\text{e}^x \times \text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2} = 1 - \dfrac{3\text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2}$

   D'où : $f'(x) = \dfrac{(\text{e}^x+1)^2}{(\text{e}^x+1)^2} - \dfrac{3\text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2} = \dfrac{\text{e}^{2x} + 2\text{e}^x + 1 - 3\text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(\text{e}^x+1)^2}$.

2. Limite en $-\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3\text{e}^x}{\text{e}^x+1} = 0$.
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty$, donc par somme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Limite en $+\infty$: nous avons une forme indéterminée "∞/∞".
Changement d'écriture : $\dfrac{3\text{e}^x}{\text{e}^x+1} = \dfrac{3\text{e}^x}{\text{e}^x(1+\text{e}^{-x})} = \dfrac{3}{1+\text{e}^{-x}}$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1+\text{e}^{-x}} = 3$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$, donc par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ puisque le dénominateur est strictement positif. Donc $f'(x) > 0$ pour tout x réel et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

4. Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue car dérivable et strictement croissante. Elle a pour intervalle image $\mathbb{R}$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5. f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$, donc sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$, et sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.

6. $f(0) = 0 + 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$, $f'(0) = \dfrac{g(0)}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

Donc une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est : $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 6 points

1. Marion a autant de chances de gagner que de perdre la première partie.

Donc $P(G_1) = P(\overline{G_1}) = \dfrac{1}{2}$.

2. D'après la formule des probabilités totales : $P(G_2) = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G_1})$.

Soit $P(G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2) = \dfrac{1}{2} \times 0,6 + \dfrac{1}{2} \times 0,3 = \dfrac{1}{2} \times 0,9 = 0,45$.

On en déduit $P(\overline{G_2}) = 1 - P(G_2) = 0,55$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $x_n = p(G_n)$ et $y_n = P(\overline{G_n})$.

3. On procède comme à la question précédente en appliquant la formule des probabilités totales.

Pour tout entier naturel n non nul, on a $P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap \overline{G_n})$.

Soit $x_{n+1} = x_n \times P_{G_n}(G_{n+1}) + y_n \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = 0,6x_n + 0,3y_n$

$y_{n+1} = 1 - x_{n+1} = (x_n + y_n) - (0,6x_n + 0,3y_n) = 0,4x_n + 0,7y_n$.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.

a. Pour tout n, $v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = x_{n+1} + (1 - x_{n+1}) = 1$, donc la suite (v_n) est constante.

b. Pour tout n, $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 4(0,6x_n + 0,3y_n) - 3(0,4x_n + 0,7y_n)$,

soit $w_{n+1} = 4 \times 0,6x_n - 3 \times 0,4x_n + 4 \times 0,3y_n - 3 \times 0,7y_n$,

d'où $w_{n+1} = (0,6 - 0,3) \times 4x_n + (0,4 - 0,7) \times 3y_n = 0,3(4x_n - 3y_n) = 0,3w_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,3$.

Le premier terme : $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = 0,5$.

c. Pour tout $n > 0$, $w_n = w_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times 0,3^{n-1}$.

d. Pour tout n entier naturel non nul, $w_n = 4x_n - 3y_n$ et $3v_n = 3x_n + 3y_n$.

Par somme $w_n + 3v_n = 7x_n$, soit $x_n = \dfrac{w_n + 3v_n}{7} = \dfrac{0,5 \times 0,3^{n-1} + 3}{7}$.

e. La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0,3$.

Puisque $-1 < q < 1$, (w_n) converge vers 0

Par somme et quotient, la suite (x_n) converge donc vers $\dfrac{3}{7}$.