Terminale S $\boxed{\text{DEVOIR SURVEILLE 5}}$ 20/01/20

Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 8 points

Les trois parties sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, a désigne un nombre réel strictement supérieur à 1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A et B les points d'affixes respectives : $z_A = 2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{a^2 - 1}$ et $z_B = 4$.

On définit les points C, D, H par :

- C est le symétrique de A par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$;
- D est le symétrique de A par rapport au point O ;
- H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD).

On note z_C, z_D, z_H les affixes respectives des points C, D et H.

Première partie

Dans cette partie, on suppose que $a = 2$.

1. Écrire la forme algébrique de z_A. Donner son module $|z_A|$.
Puis écrire la forme exponentielle de z_A.

2. Donner la valeur de z_C sous forme algébrique et exponentielle.

3. QCM
Parmi les expressions suivantes, laquelle correspond à la forme exponentielle de z_D ?

A) $z_D = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ B) $z_D = -4\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$

C) $z_D = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ D) $z_D = -4\,\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

4. Sur une figure, placer les points A, B, C, D.
Faire apparaître la construction qui vous permet de placer les points correctement.

5. Donner la nature précise du triangle OAB et du quadrilatère $ABCD$.

6. Justifier géométriquement que $z_H = \dfrac{1}{2} z_A$. En déduire la forme algébrique de z_H.
Placer le point H sur la figure de la question 4.

7. QCM Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire, du quadrilatère $ABCD$.
Quelle est la valeur exacte de $\mathcal{A}$?

A) $\mathcal{A} = 24\sqrt{3}$ B) $\mathcal{A} = 16\sqrt{3}$

C) $\mathcal{A} = 12\sqrt{3}$ D) $\mathcal{A} = 8\sqrt{3}$

Dans la suite, a est quelconque.

Deuxième partie

8. Notons ℓ_1 et ℓ_2 les longueurs respectives des diagonales $[OB]$ et $[AC]$ du losange $OABC$.
Donner la valeur exacte de ℓ_1. Donner une expression de ℓ_2 en fonction de a.

9. Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère $OABC$ est-il un carré ? Justifier la réponse.

Troisième partie

Soient (E) et (E') les équations d'inconnue complexe z :

$$(E): \quad z^2 - 4z + 4a^2 = 0 \qquad\qquad (E'): \quad z^3 - 4z^2 + 4a^2 z = 0$$

10. Justifier que l'équation (E) admet deux racines complexes non réelles.

11. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).
Donner les expressions de z_1 et z_2 en fonction de a

12. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions de l'équation (E').

Exercice 2 6 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1$.
On se propose d'utiliser deux méthodes différentes pour étudier le signe de $g(x)$.

1. Méthode 1

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \left(\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x.

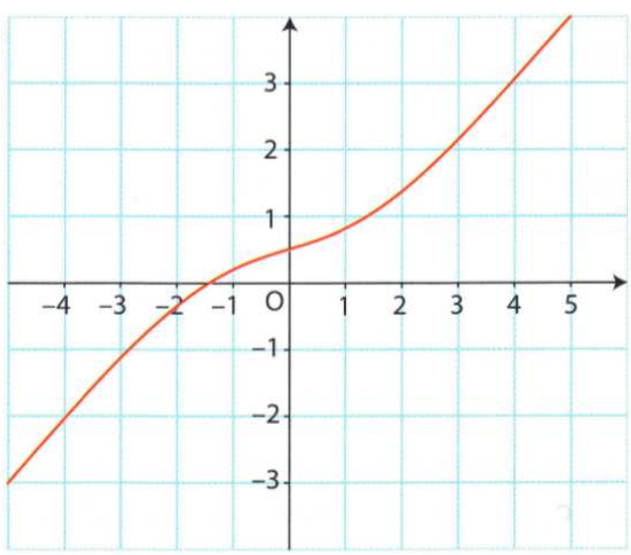
2. Méthode 2

a. Étudier suivant les valeurs de X, le signe de l'expression $X^2 - X + 1$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \dfrac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormé est dessinée ci-dessous.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.

2. Déterminer les limites de $\dfrac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$, puis en déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de la déterminer).
5. Déterminer le signe de $f(x)$.
6. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

EXERCICE 3 6 points

Marion débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner que de perdre la première partie.

On admet que, lorsqu'elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,6, alors que, si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est de 0,7.

Pour n entier naturel non nul, on note :

— l'événement G_n : « Marion gagne la n-ième partie » ;

— l'événement $\overline{G_n}$: « Marion perd la n-ième partie ».

1. Préciser les valeurs des probabilités de G_1 et de $\overline{G_1}$.
2. Calculer la probabilité de G_2 et en déduire celle de $\overline{G_2}$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $x_n = p(G_n)$ et $y_n = P(\overline{G_n})$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n$, et $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est constante.
   b. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,3 et de premier terme 0,5.
   c. Exprimer w_n en fonction de n.
   d. Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, l'expression de x_n en fonction de n
   e. Étudier la convergence de la suite (x_n).