Terminale S **Corrigé devoir surveillé 4** 19/12/19

Exercice 1 6 points

1. $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi)+\sin(2(x+2\pi)) = 2\sin(x)+\sin(2x+4\pi) = 2\sin x+\sin 2x = f(x)$ car sin est périodique de période 2π.
2. $f(-x) = 2\sin(-x)+\sin(-2x) = -2\sin x-\sin 2x = -f(x)$ car sin est impaire. On en déduit que la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
3. La parité permet d'obtenir l'étude sur $[-\pi;\ +\pi]$ à partir de l'étude sur $[0;\ \pi]$. La périodicité permet d'obtenir l'étude sur $\mathbb{R}$ à partir de l'étude sur $[-\pi;\ +\pi]$ dont l'amplitude est la période.
4. $f'(x) = 2\cos x+2\cos 2x$. D'après la deuxième formule donnée, $f'(x) = 2\cos x+2(2\cos^2 x-1) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$.

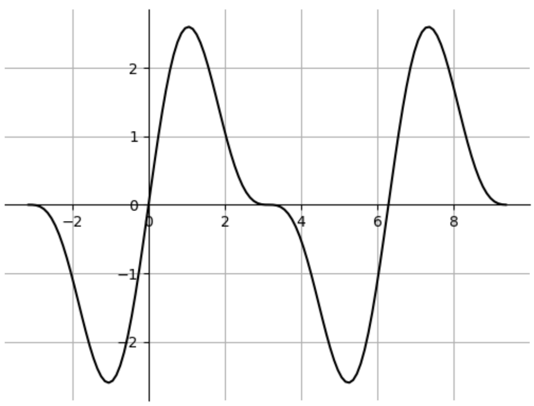
   Ou bien, d'après la première formule : $f(x) = 2\sin x + 2\sin x\cos x$ et $f'(x) = 2\cos x + 2(\cos x\cos x - \sin x\sin x) = 2\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$. Or, $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, d'où $f'(x) = 2\cos x + 2\cos^2 x - 2(1-\cos^2 x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$.
5. On développe l'expression donnée : $2(2\cos x-1)(\cos x+1) = 2(2\cos^2 x+2\cos x-\cos x-1) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = f'(x)$.
6. Pour étudier le signe de $(2\cos x - 1)$ sur $[0;\pi]$, on résout l'inéquation $2\cos x - 1 > 0$ par exemple : $2\cos x - 1 > 0 \iff 2\cos x > 1 \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff 0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ lu sur le cercle trigonométrique. De façon analogue, $2\cos x - 1 < 0 \iff x > \frac{\pi}{3}$.
7. Puisque $\cos x \geq -1$ sur $[0;\pi]$, soit $\cos x + 1 \geq 0$, $f'(x)$ a le même signe que $2\cos x - 1$.

   Donc $f'(x) > 0$ si $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ et $f'(x) < 0$ si $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$.

   On en déduit le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

   Calcul des images : $f(0) = 2\sin 0 + \sin 0 = 0$, $f(\pi) = 2\sin\pi + \sin 2\pi = 0$,
   $f(\frac{\pi}{3}) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin 2\frac{\pi}{3} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
8. Représentation graphique de f sur $[-\pi; 3\pi]$:



Exercice 2 6 points

Partie A :

1. • Avec $n = 0$, $u_1 = 3 - \dfrac{10}{5+4} = 3 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{27-10}{9} = \dfrac{17}{9}$;
   • Avec $n = 1$, $u_2 = 3 - \dfrac{10}{\frac{17}{9}+4} = 3 - \dfrac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \dfrac{90}{53} = \dfrac{159-90}{53} = \dfrac{69}{53}$.
2. Démonstration par récurrence ;
   Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 1$: la propriété est vraie au rang zéro ;
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 1$.
   $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n + 4 \geqslant 5 \Rightarrow \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{u_n+4} \Rightarrow \dfrac{10}{5} \geqslant \dfrac{10}{u_n+4} \Rightarrow -\dfrac{10}{u_n+4} \leqslant -2 \iff$
   $3 - \dfrac{10}{u_n+4} \geqslant 3 - 2$, soit finalement $u_{n+1} \geqslant 1$: la propriété est héréditaire.
   La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle est vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} - u_n = 3 - u_n - \dfrac{10}{u_n+4} = \dfrac{(3-u_n)(u_n+4) - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 12 - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$.
   Le trinôme a deux racines évidentes 1 et -2 ; il se factorise donc en :
   $-u_n^2 - u_n + 2 = (-u_n+1)(u_n+2)$ et finalement :
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
4. On a démontré à la question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc $u_n + 4 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n \geqslant$ entraîne $1 - u_n < 0$ et donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite qui est supérieure ou égale à 1.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{3 - \dfrac{10}{u_n+4} - 1}{3 - \dfrac{10}{u_n+4} + 2} = \dfrac{2 - \dfrac{10}{u_n+4}}{5 - \dfrac{10}{u_n+4}} =$
   $$\dfrac{\dfrac{2u_n+8-10}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n+20-10}{u_n+4}} = \dfrac{\dfrac{2u_n-2}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n+10}{u_+4}} = \dfrac{2u_n-2}{5u_n+10} = \dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \dfrac{2}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+2} = \dfrac{2}{5}v_n.$$
   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$, vraie pour tout naturel n, démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = \dfrac{4}{7}$.

   b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times 0,4^n = \dfrac{4}{7} \times 0,4^n$.
   Comme $\dfrac{4}{7} < 1$ et $0,4 < 1$ et par conséquent $0,4^n < 1$, on peut en déduire que $v_n < 1$, donc en particulier $v_n \neq 1$.
2. On part de la définition :
   $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2} \iff v_n(u_n+2) = u_n - 1 \iff v_nu_n + 2v_n = u_n - 1 \iff$
   $v_nu_n - u_n = -2v_n - 1 \iff u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \iff u_n = \dfrac{-2v_n-1}{v_n-1} \iff u_n = \dfrac{2v_n+1}{1-v_n}$ car $v_n \neq 1$.

3. $v_n = \dfrac{4}{7} \times 0,4^n$. On sait, comme $0 < 0,4 < 1$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,4^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2v_n + 1) = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1 - v_n) = 1$ et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 1,01$
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u+4}$
Fin du Tant que

1. À la fin on a $n = 6$.
2. La suite (u_n) est décroissante et tend vers 1 : on a $u_5 \approx 1,017$; la valeur suivante est inférieure à 1,01 : $u_6 \approx 1,008$.

Exercice 3 8 points

Partie 1

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1 - x) + 1$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1 - x) = -\infty$ donc par produit des limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0;\,+\infty[$ est dérivable sur $[0;\,+\infty[$.
$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x = -x\,\mathrm{e}^x$. $g'(0) = 0$ et $g'(x) < 0$ sur $]0;\,+\infty[$ car $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$.
La fonction g est donc décroissante sur $[0;\,+\infty[$.
3. Tableau de variations de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
g	2	$\searrow$	$-\infty$

4. **a.** Sur $[0;\,+\infty[$, g est dérivable donc continue et strictement décroissante ; de plus l'intervalle image $]-\infty;\,2]$ contient 0 ; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [0;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. La calculatrice donne :
   $g(1) = 1$ et $g(2) \simeq -6,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
   $g(1,2) \simeq 0,3$ et $g(1,3) \simeq -0,1$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$;
   $g(1,27) \simeq 0,04$ et $g(1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\alpha}, 28) \simeq 0,007$, donc $1,27 < \alpha < 1,28$.
   c. On a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\alpha} - \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\alpha}(1 - \alpha) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. On déduit des questions précédentes : $g(x) > 0$ sur $[0;\,\alpha[$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha;\,+\infty[$.

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0;\,+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable sur cet intervalle :
$A'(x) = \dfrac{4(\mathrm{e}^x + 1) - 4x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \dfrac{4(\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$
Comme $(\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$ pour tout x, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2. D'après les questions précédentes, on a : $A'(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$, $A'(\alpha) = 0$, $A'(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$; donc : $A(x)$ est croissante sur $[0; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

1. On sait que $x \geq 0$, donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est égale à $x \times f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1} = A(x)$.
Or on a vu dans la partie 2 que la fonction A présente un maximum pour $x = \alpha$.

2. La tangente en $M(\alpha; f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.
Or $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$, donc $f'(\alpha) = -\dfrac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha + 1)^2}$.
Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha} = -\dfrac{4}{\mathrm{e}^\alpha + 1} \times \dfrac{1}{\alpha}$
Or on a vu, (partie 1 question 4.c), que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, soit $\alpha - 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^\alpha}$ d'où $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^\alpha} = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha + 1}{\mathrm{e}^\alpha}$
et donc $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1}$
Le coefficient directeur de la droite (PQ) est donc égal à $-\dfrac{4}{\mathrm{e}^\alpha + 1} \times \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = -\dfrac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha + 1)^2}$
Les coefficients directeurs sont égaux donc les droites sont parallèles.