Terminale S | **DEVOIR SURVEILLE 4** | 16/12/19

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 — 6 points

On rappelle les formules : $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ et $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

1. Montrer que f est périodique de période 2π.

2. Étudier la parité de la fonction f.

3. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = [0\,;\,\pi]$.

4. Déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$.

5. Montrer que pour tout x, $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

6. Etudier le signe de l'expression $2\cos x - 1$ sur l'intervalle I.

7. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I.

8. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$.

Exercice 2 — 6 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 = 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$.

4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,4$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{4}{7}$.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩾ 1,01
   n ← n + 1
   u ← 3 − 10/(u + 4)
Fin du Tant que
```

Exercice 3 8 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$.

La figure est donnée en annexe. Pour tout réel x positif ou nul, on note :
M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x; f(x))$,
P le point de coordonnées $(x; 0)$,
Q le point de coordonnées $(0; f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α. On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α. La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.