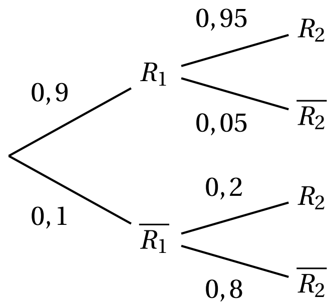
Terminale S

Corrigé devoir surveillé 3

25/11/19

EXERCICE 1 9,5 points

1. **a.** L'énoncé donne $p(R_1) = 0,9$, $p_{R_1}(R_2) = 0,95$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,2$.



b. On cherche $p(R_1 \cap R_2)$: $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$

c. On cherche $p(R_2)$: R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales on a :

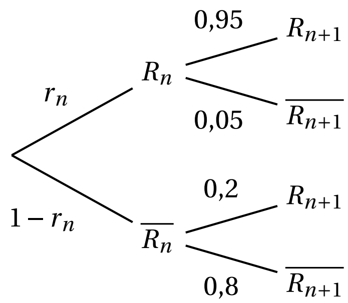
$$\begin{aligned} p(R_2) &= p(R_1 \cap R_2) + p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) \\ &= 0,855 + p\left(\overline{R_1}\right) \times p_{\overline{R_1}}(R_2) \\ &= 0,855 + 0,1 \times 0,2 \\ &= 0,875 \end{aligned}$$

d. On cherche $p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right)$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)}{p(R_2)}$$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{0,02}{0,875} = \frac{4}{175} \approx 0,023$$

2. **a.**



b. R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p(R_{n+1}) \\ &= p(R_n \cap R_{n+1}) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) + p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p\left(\overline{R_n}\right) \\ &= 0,95 r_n + 0,2(1 - r_n) \\ &= 0,75 r_n + 0,2 \end{aligned}$$

c. On procède par récurrence

<u>Initialisation</u> : $r_1 = p(R_1) = 0,9$ et $0,1 \times 0,75^0 + 0,8 = 0,9$

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel non nul tel que $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 0,75 r_n + 0,2 \text{ d'après la question précédente} \\ &= 0,75\left(0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8\right) + 0,2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

$= 0,1 \times 0,75^n + 0,6 + 0,2$
$= 0,1 \times 0,75^n + 0,8$

On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 1 or elle est vérifiée à ce même rang.

Par le principe de récurrence on peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

d. $|0,75| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0,8$.

On en déduit qu'avec le temps, la probabilité pour un client de rendre la bouteille se stabilise à 0,8.

EXERCICE 2 4 points

1. Réponses **a** et **b**.

$\lim\limits_{x\to2^-} (x-2) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to2^+} (x-2) = 0^+$. Donc $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

Rappel : $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x)$.

2. Réponses **b** et **d**.

Les polynômes aux dénominateurs ont un discriminant strictement positif donc les deux fonctions ont deux valeurs interdites (2 et 3 pour f, 3 et -4 pour g). Donc les courbes ne peuvent pas avoir les mêmes asymptotes "verticales". Chacune a une seule asymptote horizontale qui est la droite d'équation $y = 0$ (limite de f et g en $-\infty$ et en $+\infty$), donc commune.

3. Réponse **a**.

Pour la réponse **a**, c'est le cours. Pour les autres, on n'en sait rien, tout est possible.

Prendre par exemple $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

4. Réponse **a**.

f est une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$.

D'après les limites , l'image de l'intervalle $]-\infty; 5[$ est $]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution. Et pour tout réel a, l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution. On ne sait pas si cette solution est unique car on ne sait pas si f est strictement monotone sur $]-\infty; 5[$.

La droite d'équation $y = 6$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$.

La fonction f ne peut pas être celle donnée qui vérifie toutes les conditions à part $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 6$.

5. Réponses **b**, **c** et **d**.

D'après le tableau de variation, la fonction f est continue strictement décroissante sur $[-2; 1[$ et strictement croissante sur $]1; 5]$.

L'image de l'intervalle $[-2; 1]$ est l'intervalle $I = [1; 6]$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-2; 1]$.

L'image de l'intervalle $[1; 5]$ est l'intervalle $J = [1; 4]$, donc si $4 < m \leqslant 6$, alors $m \in I$ mais $m \notin J$ et l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique qui est dans $[-2; 1[$.

Si $1 < m < 3$, alors $m \in I$ et $m \in J$ et l'équation $f(x) = m$ admet exactement deux solutions, une sur $[-2; 1[$, l'autre sur $]1; 5]$. Et si m est suffisamment proche de 1, alors les deux solutions sont positives (proches de 1).

6. Réponse **b**

Formules : $(u^5)' = 5u'\,u^4$ et $(3-2x)' = -2$, donc $f'(x) = -10(3-2x)^4$.

7. Réponses **b**, **c** et **d**.
Le point du cercle trigonométrique correspondant à $\pi - x$ est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du point correspondant à x. Ces deux points ont donc une abscisse opposée et la même ordonnée. Donc $\sin(\pi - x) = \sin x$. De plus $\sin u = -\sin(-u)$, donc $\sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi)$.
Enfin, le point correspondant à $\pi - x$ est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point correspondant à $x + \pi$. Donc $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

8. Réponses **a** et **d**.
Formules : $(u^2)' = 2u'\,u$, $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$. Donc $f'(x) = 2\sin x\cos x = -g'(x)$.

EXERCICE 3 6,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

1. D'après la représentation graphique de f, on peut conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^3(2 - 3/x + 4/x^3)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2 - 3/x + 4/x^3) = 2$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2 - 3/x + 4/x^3) = 2$
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Calcul de la dérivée : $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.
Cette dérivée s'annule en 0 et en 1. Elle est négative sur $[-1;\,1]$ et positive sur $]-\infty;\,-1] \cup [1;\,+\infty[$.
Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;\,-1]$, décroissante sur $[-1;\,1]$, et croissante sur $[1;\,+\infty[$.
$f(0) = 4$, $f(1) = 3$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$, la fonction f a un minimum égal à $f(1) = 3$. Donc $f(x) > 0$ sur $[0;\,+\infty[$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
Sur l'intervalle $]-\infty;\,0]$, la fonction f est continue car c'est un polynôme, elle est strictement croissante. L'image de l'intervalle $]-\infty;\,0]$ est l'intervalle $]-\infty;\,4]$ qui contient 0. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty;\,0]$.
Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5. **a.** Il faut écrire : `Tant que` $b - a > 0{,}001$
puis : `Si` $f(a) \times f(m) \leqslant 0$
ou alors :
Si $f(a) \times f(m) > 0$ alors
a prend la valeur de m
Sinon
b prend la valeur de m

b. On ne peut pas prendre pour valeurs initiales $a = -2$ et $b = -1$ car $f(-2) = -24$ et $f(-1) = -1$ donc $0 \notin [f(-2);\,f(-1)]$.

c. Si on choisit pour valeurs initiales $a = -1$ et $b = 0$, m prend successivement les valeurs $-0{,}5$, -0.75 et $-0{,}875$.

6. On obtient un encadrement de α à 10^{-3} près avec la calculatrice : $-0{,}911 \leqslant \alpha \leqslant -0{,}910$.