Terminale S $\boxed{\textbf{DEVOIR SURVEILLE 3}}$ 25/11/19

Durée : 2 heures

Chaque réponse devra être justifiée avec précision. L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE 1 **9,5 points**

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

— à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$;

— si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$;

— si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. **a.** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.

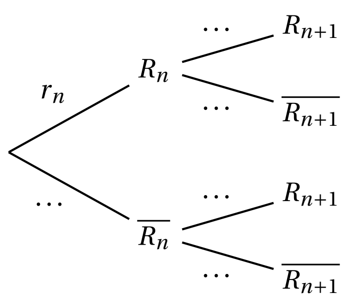
b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

d. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question il peut y avoir une ou plusieurs réponses correctes.
Dans chacun des cas suivants, indiquer sur la copie le numéro de la question puis la ou les lettres correspondant aux bonnes réponses, sans justification.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = - \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$;

b. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$;

c. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = +\infty$;

d. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$;

2. Les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{-4}{x^2-5x+6}$ et $g(x) = \dfrac{-3}{x^2+x-12}$ ont :

a. les mêmes asymptotes "verticales" ;

b. le même nombre de valeurs interdites ;

c. les deux mêmes asymptotes "horizontales" ;

d. une asymptote horizontale commune.

3. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 2$, alors :

a. la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à la courbe en $-\infty$;

b. f est majorée par 2 sur l'intervalle $]-\infty; 0]$;

c. l'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution ;

d. f est décroissante sur un intervalle de la forme $]-\infty; b]$ où b est un réel négatif.

4. f est une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ et telle que $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 5 \\ x<5}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 5 \\ x>5}} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6$.

a. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution ;

b. Il existe un réel a tel que l'équation $f(x) = a$ n'a pas de solution ;

c. La droite d'équation $y = 5$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$;

d. La fonction f peut être la fonction définie pas $f(x) = \dfrac{6x^3-20x^2}{(x-5)^3}$.

5. La fonction f admet le tableau de variation suivant :

x	-2		1		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

a. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[-2; 1]$;

b. L'équation $f(x) = m$ admet une solution unique si et seulement si $4 < m \leqslant 6$;

c. si $1 < m < 3$, l'équation $f(x) = m$ admet exactement deux solutions ;

d. L'équation $f(x) = m$ peut avoir deux solutions positives.

6. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-2x)^5$ a pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction f' donnée par :

a. $f'(x) = 5(3-2x)^4$;

b. $f'(x) = -10(3-2x)^4$;

c. $f'(x) = 15(3-2x)^4$;

d. autre.

7. On considère la fonction sinus, noté sin, définie sur $\mathbb{R}$ et x un réel quelconque.

a. $\sin(\pi - x) = -\sin x$;

b. $\sin(\pi - x) = \sin x$;

c. $\sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi)$;

d. $\sin(\pi - x) = -\sin(x + \pi)$.

8. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sin x)^2$ et $g(x) = (\cos x)^2$. On note f' et g' les fonctions dérivées définies sur $\mathbb{R}$.

a. $f'(x) = 2\sin x \cos x$;

b. $f'(x) = -2\sin x \cos x$;

c. $f'(x) = g'(x)$;

d. $f'(x) = -g'(x)$.

EXERCICE 3 — 6,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur une calculatrice et conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f en justifiant toutes les étapes.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5. On souhaite trouver un encadrement de α à 10^{-3} près en utilisant l'algorithme de dichotomie ci-dessous, où les valeurs initiales de a et b sont choisies au début.

```
Tant que b − a < 0,001
    m prend la valeur (a + b)/2
    Si f(a) × f(m) > 0 alors
        b prend la valeur de m
    Sinon
        a prend la valeur de m
    FinSi
FinTantque
```

a. Cet algorithme comporte des erreurs. Recopier le en corrigeant ces erreurs.

b. Peut-on prendre pour valeurs initiales $a = -2$ et $b = -1$?

c. Si on choisit pour valeurs initiales $a = -1$ et $b = 0$, quelle est la valeur de m après trois passages dans la boucle ?

6. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.