Terminale S | **Corrigé Devoir Surveillé 2** | 15/10/18

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 10 points

Partie A : Conjectures

1. Formules entrées dans les cellules B3 et C3.
   en B3 : « $= 2 * B2 - A2 + 3$ »
   en C3 : « $= 2 \wedge (A3)$ » ou « $= 2 * C2$ »
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	l3	24587	8192

Conjectures : la limite de (u_n) semble être $+\infty$, et celle de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ semble être 3.

Partie B : Etude de la suite (u_n)

1. Démonstration par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
   initialisation : $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.
   hérédité : Soit n un naturel quelconque et supposons que : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$
   D'après la définition : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3 = 2\left(3 \times 2^n + n - 2\right) - n + 3 = 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 = 3 \times 2^{n+1} + n - 1$ soit
   $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 1 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2$.
   La relation est vraie au rang $n + 1$.
   Conclusion : la relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$.
   D'après le principe de la récurrence on a donc démontré que pour tout naturel n,
   $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 2^n = +\infty$ car c'est la limite d'une suite géométrique de premier terme 3 strictement positif et de raison $q = 2 > 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-2) = +\infty$. Donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. $u_{18} = 786448 < 1000000$ et $u_{19} = 1572881 > 1000000$.
   19 est donc le rang du premier terme supérieur à un million.

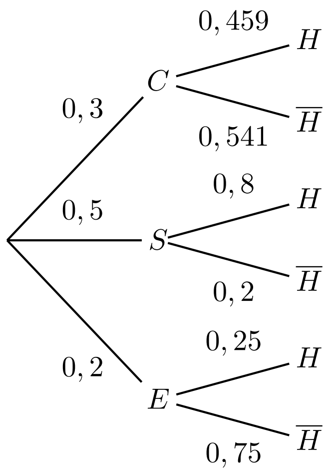
Partie C : Etude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n-2}{2^n}$
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} = \left(3 + \dfrac{n-1}{2^{n+1}}\right) - \left(3 + \dfrac{n-2}{2^n}\right) = \dfrac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}} = \dfrac{-n+3}{2^{n+1}}$ est du signe de $-n+3$
   Donc $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} < 0$ si $n > 3$ alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n-2}{2^n} = 3 + \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n-1}}$
3. D'après l'encadrement donné, on en déduit que pour $n \geqslant 4$, $3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2^{n-1}}$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 3$
   D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$.

EXERCICE 2 6 points

Partie A

1. Arbre pondéré complet :



2. On a, d'après l'arbre pondéré : $P(C \cap H) = 0,3 \times 0,459 = 0,1377$.
3. Les événements C, S et E formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(H) &= P(C\cap H)+P(S\cap H)+P(E\cap H) \\ &= 0,1377+0,5\times 0,8+0,2\times 0,25 \\ &= 0,5877 \end{aligned}$$

4. Il s'agit ici de calculer $P_H(S)$. Par définition :

$$\begin{aligned} p_H(S) &= \frac{P(S\cap H)}{P(H)} \\ &= \frac{0,5\times 0,8}{0,5877} \\ &\approx 0,681 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

Partie B

1. D'après les conditions du prélèvement assimilé à la répétition 10 fois, de manière indépendante, de la même expérience qui a pour probabilité de succès 0,5877, la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5877$.
2. On calcule $P(X = 1)$. La calculatrice donne $P(X = 1) \approx 0,002$.
3. On calcule $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X \leq 3) \approx 0,064$ donc $P(X \geq 4) \simeq 1 - 0,064 = 0,936$.

EXERCICE 3 4 points

1. **Réponse c**

   A et B sont incompatibles, soit $A \cap B = \emptyset$ et $P(A \cap B) = 0$. Donc si $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles alors A et B ne sont pas indépendants puisque $P(A) \times P(B) \neq 0$.
   $A \cap \overline{B} = A$ donc A et $\overline{B}$ ne sont pas incompatibles.
   A et $\overline{B}$ ne sont pas indépendants car A et B ne sont pas indépendants.
2. **Réponse a**.

   $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,15$. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,65$.
3. **Réponses c et e**

   $P_A(B) = P(B)$, c'est le cours. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \neq 0$ puisque A et B de probabilités non nulles. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A) + P(B)$.
4. **Réponses a, d et e**

   $P(D \cap C) = P(D) \times P(C) = 1/36$.
   Donc $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 14/36 = 7/18$.
   $\overline{C}$ et D indépendants donc $P_D(\overline{C}) = P(\overline{C}) = 1 - P(C)$