Terminale S | **Corrigé Devoir Surveillé 2** | 14/10/19

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 10 points

1. a. $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{7}{3} \simeq 2{,}33$, $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9} \simeq 2{,}89$,
$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{97}{27} \simeq 3{,}59$ et $u_4 = \frac{2}{3}u_3 + 1 + 1 = \frac{356}{81} \simeq 4{,}40$.

b. On peut conjecturer que la suite est croissante.

2. a. On montre par récurrence la propriété $P_n : u_n \leq n+3$, pour tout entier naturel n,
Initialisation : $u_0 = 2$ donc $u_0 \leq 0+3$ et P_0 est vraie.
Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $u_k \leq k+3$;
alors $\frac{2}{3}u_k \leq \frac{2}{3}k + 2$, puis $\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leq \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1$,
soit $u_{k+1} \leq k+3 \leq (k+1)+3$, donc la propriété P_n est vraie pour $k+1$.
Conclusion : P_n est vraie pour tout n.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

c. Puisque $u_n \leq n+3$, on a $n+3-u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui prouve la croissance de la suite (u_n).

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec $v_0 = u_0 = 2$.

b. Alors, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et donc $u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c. La suite (v_n) a pour limite 0, (suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$), et donc la limite de la suite (u_n) est celle de n, donc $+\infty$.

4. a.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} k$$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = 2\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc

$$S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

b.

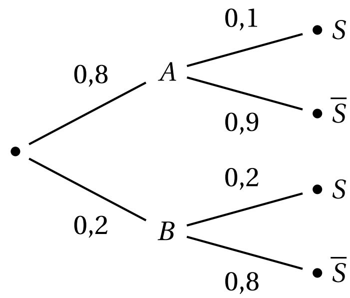
$$T_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{6}{n^2}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Quand n tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers 0 (puisque la parenthèse tend vers 1) et le deuxième terme tend vers $\frac{1}{2}$, (limite de $\frac{n^2}{2n^2}$). Donc la suite (T_n) a pour limite $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 7 points

Partie A

1. Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. a. En suivant la quatrième branche : $p\left(B \cap \overline{S}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{S}\right) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$.

b. On calcule de même : $p\left(A \cap \overline{S}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$.

$\{A\,;\,B\}$ étant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a : $p\left(\overline{S}\right) = p\left(A \cap \overline{S}\right) + p\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,72 + 0,16 = 0,88$.

3. Nous devons calculer $p_S(B)$, soit $\dfrac{p(S \cap B)}{p(S)}$. Or $p\left(\overline{S}\right) = 0,88$, donc $p(S) = 1 - p\left(\overline{S}\right) = 0,12$.

Donc $p_S(B) = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ au centième près.

Partie B

1. La probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à 0,88. C'est une épreuve de Bernoulli. Cette épreuve est répétée de façon identique et indépendante 10 fois, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

2. Il faut trouver $p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} = 0,88^{10} \approx 0,28$ au centième près.

3. Il faut calculer $p(X \geqslant 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$; avec la calculatrice, on obtient :
$p(X \geqslant 8) \approx 0,233\,043 + 0,379\,774 + 0,278\,501 \approx 0,891\,318 \approx 0,89$ au centième près.

EXERCICE 3 3 points

1. ROC : A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, B et $\overline{B}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

d'où $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) \times (1 - P(B)) = P(A) \times P(\overline{B})$
Donc $\overline{B}$ et A sont aussi indépendants.

2. Pour que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter, il faut que les deux feux soient verts au moment où il arrive à leur hauteur. La probabilité cherchée est $P(A \cap B)$.

D'après l'énoncé, $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,45$.

Les événements A et B étant indépendants on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, soit :

$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,45 = 0,18$.

La probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter est 0,18.

3. Les événements A et $\overline{B}$ sont eux aussi indépendants d'après la première question. Donc on a $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$, soit $P(A \cap \overline{B}) = 0,4 \times 0,55 = 0,22$.

Cette valeur correspond à la probabilité que l'automobiliste passe le premier feu au vert mais soit obligé de s'arrêter au second feu.