

Durée : 2 heures

Chaque réponse devra être justifiée avec précision. Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 10 points

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- b.** Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq n + 3$$

- b.** Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

- c.** En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$.
- a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
- b.** En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + n$$

- c.** Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

- a.** Exprimer S_n en fonction de n .
- b.** Déterminer la limite de la suite (T_n) .

EXERCICE 2 7 points

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A »;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B »;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \bar{S}$?
b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

EXERCICE 3 3 points

1. **ROC** : démontrer que si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et \bar{B} le sont aussi.
2. Sur son trajet pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. La probabilité pour que le feu soit vert au moment où il arrive à sa hauteur est 0,4 pour le premier feu et 0,45 pour le second feu.
On note A l'évènement "le premier feu est vert" et B l'évènement "le second feu est vert".
On fait l'hypothèse que ces deux événements sont indépendants.
 - a. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter?
 - b. Calculer $P(A \cap \bar{B})$. A quel événement correspond cette probabilité?