Terminale S $\boxed{\textbf{CORRIGE DEVOIR SURVEILLE 1}}$ 24/09/18

Exercice 1 (5 pts)

1. C'est une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".
   On transforme donc l'écriture : $n^3 - 2n - 18 = n^3\left(1 - 2/n^2 - 18/n^3\right)$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} 2/n^2 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 18/n^3 = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - 2/n^2 - 18/n^3\right) = 1$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - 2/n^2 - 18/n^3\right) = +\infty$

2. C'est une forme indéterminée du type " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".
   On transforme donc l'écriture : $\dfrac{3n-4}{-2n-7} = \dfrac{n(3-4/n)}{n(-2-7/n)} = \dfrac{3-4/n}{-2-7/n}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} -4/n = \lim\limits_{n\to+\infty} -7/n = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-4/n) = 3$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2-7/n) = -2$.
   Alors, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3-4/n}{-2-7/n} = -\dfrac{3}{2}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,16)^n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
   Alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((0,16)^n + \dfrac{1}{n^2}\right) = 0$

4. On procède par comparaison, car $3 + (-1)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Longleftrightarrow 2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{n} \leq \dfrac{3+(-1)^n}{n} \leq \dfrac{4}{n}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{n} = 0$.

5. On procède par comparaison, car $\sin(n)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Longleftrightarrow -2 \leq 2\sin(n) \leq 2 \Longleftrightarrow -2 - n^2 \leq 2\sin(n) - n^2 \leq 2 - n^2$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - n^2\right) = -\infty$, donc puisque $2\sin(n) - n^2 \leq 2 - n^2$, alors par comparaison (théorème de majoration) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sin(n) - n^2\right) = -\infty$

Exercice 2 (5 pts)

1. On détermine les premiers termes (un par un) : $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 7$.
   On peut alors conjecturer que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrons par récurrence la propriété P_n : "pour tout entier naturel n, $v_n \geq 0$".
   — Initialisation : $v_0 = 0$ donc $v_0 \geq 0$ et P_0 est vraie.
   — Hérédité : supposons que la propriété P_k est vraie pour un entier k quelconque, c'est-à-dire $v_k \geq 0$, et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $v_{k+1} \geq 0$.
   $v_k \geq 0 \Longrightarrow 2v_k \geq 0 \Longrightarrow 2v_k + 1 \geq 1$, donc $v_{k+1} \geq 0$ et l'hérédité est démontrée.
   — Conclusion : la propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n \geq 0$.
3. Pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = v_n + 1$ et $v_n \geq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et la suite (v_n) est croissante.
4. A la calculatrice, on obtient $n = 10$ pour $v_n > 10^3$ et $n = 20$ pour $v_n > 10^6$.

Exercice 3 (10 pts)

1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de $3000 + 80$, c'est-à-dire 3080. Entre le 1er novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1er juin 2018 est donc : $u_1 = 3080 \times 0,95 = 2926$.
2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95 = 0,95u_n + 80 \times 0,95 = 0,95u_n + 76$.
3. Formule à entrer dans la cellule C2 : $\boxed{\texttt{= 0.95*B2 + 76}}$.
4. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   - **Initialisation**. On a $u_0 = 3000 \geqslant 1520$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité.** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 1520$. Démontrons alors que $u_{n+1} \geqslant 1520$.
     Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1520$, donc, en multipliant membre à membre par 0,95 : $0,95u_n \geqslant 0,95 \times 1520$
     puis, en ajoutant membre à membre 76 : $0,95u_n + 76 \geqslant 0,95 \times 1520 + 76$
     ce qui équivaut à : $u_{n+1} \geqslant 1520$
     ce qu'il fallait démontrer. La propriété est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1520$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors : $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76$.
   D'après la question précédente, $u_n \geqslant 1520$, donc $-0,05u_n \leqslant -0,05 \times 1520$, c'est-à-dire $-0,05u_n \leqslant -76$, par conséquent, $-0,05u_n + 76 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) La suite (u_n) est décroissante, minorée, elle est donc convergente.
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1520 \\ &= 0,95u_n + 76 - 1520 \\ &= 0,95u_n - 1444 \\ &= 0,95\left(u_n - \frac{1444}{0,95}\right) \\ &= 0,95\,(u_n - 1520) \\ &= 0,95v_n. \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,95$.
   Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 1480 \times 0,95^n$. Et comme $v_n = u_n - 1520$, on en déduit que $u_n = v_n + 1520$, ce qui donne bien : $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

   (c) $-1 < 0,95 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$.
   On en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$.
6. Algorithme complété :

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u ⩾ 2000 :
      n ← n + 1
      u ← 0,95 * u + 76
Fin de Tant que
```

7. La limite de la suite (u_n) est 1520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour. Pour déterminer l'année de fermeture, on peut programmer l'algorithme précédent.
   On obtient avec la calculatrice $n = 22$. C'est donc la 22e année que la réserve fermera, soit en 2039.