Terminale S $\boxed{\textbf{DEVOIR SURVEILLE 1}}$ 24/09/18

Durée : 2 heures

La qualité de la rédaction est importante. Toutes les réponses doivent être justifiées avec précision.

Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 (5 pts)

Calculer les limites suivantes en détaillant les justifications.

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^3 - 2n - 18\right)$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n - 4}{-2n - 7}$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left((0,16)^n + \dfrac{1}{n^2}\right)$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3 + (-1)^n}{n}\right)$
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2\sin(n) - n^2\right)$

Exercice 2 (5 pts)

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 0$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = 2v_n + 1$.

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite. Conjecturer le sens de variation de la suite.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $v_n \geq 0$.
3. En déduire que la suite (v_n) est croissante.
4. Déterminer le premier entier n tel que $v_n > 10^3$, puis le premier entier n tel que $v_n > 10^6$.

Exercice 3 (10 pts)

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1$^{\text{er}}$ juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

— entre le 1$^{\text{er}}$ juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;

— entre le 1$^{\text{er}}$ novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1$^{\text{er}}$ juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.

3. A l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2553

   Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

   La notation « $\leftarrow$ » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.