Terminale S **CORRIGE DEVOIR SURVEILLE 1** 23/09/19

Exercice 1 (5 pts)

1. Il s'agit de la limite d'une suite géométrique.
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n=+\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ si $q>1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^n=-\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,3)^n=0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ si $-1<q<1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$.
Alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((0,3)^n+n^3\right)=+\infty$

3. C'est une forme indéterminée du type " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".
On transforme donc l'écriture : $\dfrac{5n^2-2}{3n^2+4n}=\dfrac{n^2(5-2/n^2)}{n^2(3+4/n)}=\dfrac{5-2/n^2}{3+4/n}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2/n^2=\lim\limits_{n\to+\infty} 4/n=0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-2/n^2\right)=5$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+4/n)=3$.
Alors, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5-2/n^2}{3+4/n}=\dfrac{5}{3}$.

4. $\dfrac{3n+(-1)^n}{n^2}=\dfrac{3}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0$. Pour la limite de $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, on procède par comparaison : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-1\leq(-1)^n\leq 1\iff-\dfrac{1}{n^2}\leq\dfrac{(-1)^n}{n^2}\leq\dfrac{1}{n^2}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$.
Alors, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+(-1)^n}{n^2}=0$.

5. On procède par comparaison, car $\sin(n)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$\sin(n)\leq 1\iff-\sin(n)\geq-1\iff\sqrt{n}-\sin(n)\geq\sqrt{n}-1$
$\iff n(\sqrt{n}-\sin(n))\geq n(\sqrt{n}-1)\iff n\sqrt{n}-n\sin(n)\geq n(\sqrt{n}-1)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-1)=+\infty$, et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n}-1)=+\infty$. Alors par comparaison (théorème de minoration) : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{n}-n\sin(n))=+\infty$

Exercice 2 (5 pts)

1. On a : $d_1=50$ et pour tout entier $n\geq 1$, $d_{n+1}=d_n-\dfrac{1}{100}dn=0,99\,d_n$.
Donc la suite (d_n) est géométrique de raison 0,99 et de premier terme $d_1=50$.
Alors pour tout entier $n\geq 1$, $d_n=50\times 0,99^{n-1}$.
2. Pour tout entier $n\geq 1$, $D_n=d_1+d_2+\ldots+d_n$. D_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme d_1 et de raison 0,99, soit $D_n=d_1\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$ avec $d_1=50$ et $q=0,99$.
$D_n=50\times\dfrac{1-0,99^n}{1-0,99}=5000\times(1-0,99^n)$.
3. La raison $q=0,99$ vérifie la condition $-1<q<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,99^n=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n=5000$.
Par définition, pour tout entier $n\geq 1$, $D_n<5000$, donc le globe-trotter ne peut pas gagner son pari. Il peut s'approcher des 5000 km sans jamais les atteindre !
4. On tabule la suite (D_n) à la calculatrice à partir de $n=1$ par pas de 1. On obtient ainsi $N=36$.

Exercice 3 (10 pts)

1. (a) On complète la tableau à l'aide de la calculatrice :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	$3,4$	$2,18$	$1,19$	$0,61$	$0,31$	$0,16$	$0,08$	$0,04$

   (b) D'après les résultats, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir de u_1.

2. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \geq \dfrac{15}{4}\times(0,5)^n$.

   — **Initialisation**. On a $u_1 = 3,4$ et $\dfrac{15}{4} \times 0,5 = 1,875$, la propriété est donc vraie pour $n = 1$.

   — **Hérédité.** Supposons que pour un entier k quelconque, $u_k \geqslant \dfrac{15}{4} \times (0,5)^k$.

   Démontrons alors que $u_{k+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times (0,5)^{k+1}$.

   $u_{k+1} = \dfrac{1}{5}u_k + 3 \times 0,5^k$ et par hypothèse de récurrence, $u_k \geqslant \dfrac{15}{4} \times (0,5)^k$.

   Donc, en multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{5}$, on obtient $\dfrac{1}{5}u_k \geqslant \dfrac{3}{4} \times (0,5)^k$

   puis, en ajoutant membre à membre $3\times0,5^k$, on obtient $\dfrac{1}{5}u_k+3\times0,5^k \geqslant \dfrac{3}{4}\times(0,5)^k+ 3 \times 0,5^k$, soit $u_{k+1} \geqslant \left(\dfrac{3}{4}+3\right) \times (0,5)^k$, ce qui entraîne : $u_{k+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times (0,5)^{k+1}$

   La propriété est donc héréditaire.

   — **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times (0,5)^n$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, n non nul, alors : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n = -\dfrac{4}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

   D'après la question précédente, $u_n \geqslant \dfrac{15}{4}\times0,5^n$, donc $-\dfrac{4}{5}u_n \leqslant -3\times0,5^n$, donc $-\dfrac{4}{5}u_n+ 3 \times 0,5^n \leqslant 0$, et par conséquent, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) La suite (u_n) est décroissante à partir de u_1 et minorée par 0 donc elle est convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors : $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - 5 \times 0,5^n$

   soit, $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n - 2 \times 0,5^n = \dfrac{1}{5}(u_n - 10 \times 0,5^n) = \dfrac{1}{5}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 10 = -8$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n = -8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. Et comme $u_n = v_n + 10 \times 0,5^n$, on en déduit que : $u_n = -8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.

   (c) $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, et $-1 < 0,5 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$.

   On en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Algorithme complété :

```
n ← 0
u ← 2
Tant que u > 0,01
      n ← n + 1
      u ← −8×0,2^n+10×0,5^n  ou (1/5)×u+3×0,5^(n−1)
Fin de Tant que
```