Terminale S | **Corrigé Bac Blanc de Mathématiques** | 05/03/20

EXERCICE 1 5 points

1. • *Initialisation* : $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant \text{e}^2$. L'encadrement est donc vrai au rang 0.
   • *Hérédité* : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $1 \leqslant u_n \leqslant \text{e}^2$, on a donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \text{e}$ ou encore $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \text{e}$, puis par produit par e :
   $\text{e} \leqslant \text{e} \times \sqrt{u_n} \leqslant \text{e} \times \text{e}$ et *a fortiori* $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \text{e}^2$. L'encadrement est héréditaire.
   On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de la récurrence on a montré que pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \text{e}^2$.
2. (a) Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \text{e}\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\text{e} - \sqrt{u_n}\right)$.
   Or on a d'une part $\sqrt{u_n} \geqslant 0$, et on a vu dans la question précédente que $\sqrt{u_n} < \text{e} \iff \text{e} - \sqrt{u_n} > 0$ donc finalement $\sqrt{u_n}\left(\text{e} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.
   (b) La suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant \text{e}^2$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

   (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln\left(\text{e} \times \sqrt{u_n}\right) - 2 = \ln \text{e} + \ln\sqrt{u_n} - 2 = 1 - 2 + \dfrac{1}{2}\ln u_n = \dfrac{1}{2}\ln u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(\ln u_n - 2) = \dfrac{1}{2}v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$.
   (b) On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -2\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = -\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (c) Or $v_n = \ln(u_n) - 2 \iff \ln(u_n) = v_n + 2 = 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff u_n = \text{e}^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
   (d) Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \text{e}^2$.
4. **Affirmation 1** : « Si $u_0 = 2\,020$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   On a $u_1 = \text{e} \times \sqrt{2\,020} \approx 122$;
   $u_2 = \text{e} \times \sqrt{u_1} \approx 30$;
   $u_3 = \text{e} \times \sqrt{u_2} \approx 15$ L'affirmation n'est pas vraie.

   Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \text{e}^2$. »
   L'affirmation est vraie car l'initialisation de la récurrence est encore valable : $1 \leqslant u_0 \leqslant \text{e}^2$, donc l'encadrement est encore vrai.

   Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »
   La suite (u_n) est constante si et seulement si quel que soit n, $u_{n+1} = u_n \iff \text{e} \times \sqrt{u_n} = u_n \iff \text{e} \times \sqrt{u_n} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{u_n} \iff \sqrt{u_n} \times \sqrt{u_n} - \text{e} \times \sqrt{u_n} = 0 \iff \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \text{e}) = 0 \iff \sqrt{u_n} = 0$ ou $\sqrt{u_n} = \text{e} \iff u_n = 0$ ou $u_n = \text{e}^2 \iff u_0 = 0$ ou $u_0 = \text{e}^2$.
   L'affirmation est fausse.

EXERCICE 2 **5 points (Elèves qui ne suivent pas l'enseignement de spécialité mathématique)**

Partie A

1. $z_1 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{6}} = \dfrac{7}{6}\times\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{7}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{7}{12}+\text{i}\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$:

$$z_1 = \frac{7}{12}+\text{i}\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

2. $z_0 = \left(1+\dfrac{0}{6}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{2\times 0\times\pi}{6}} = \text{e}^{\text{i}\times 0} = \cos 0 + \text{i}\sin 0 = 1$: $z_0 = 1$

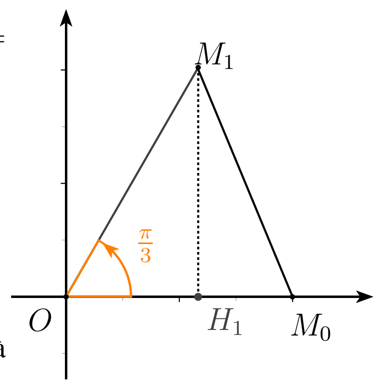
$z_6 = \left(1+\dfrac{6}{6}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{2\times 6\times\pi}{6}} = 2\text{e}^{\text{i}\times 2\pi} = 2(\cos 2\pi + \text{i}\sin 2\pi) = 2$: $z_6 = 2$

3. Soit H_1 le pied de la hauteur du triangle OM_0M_1 issue de M_1.
Dans le triangle rectangle OM_1H_1, on a $\sin\widehat{M_0OM_1} = \dfrac{H_1M_1}{OM_1}$, soit

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{H_1M_1}{\frac{7}{6}}$$

On en déduit : $H_1M_1 = \dfrac{7}{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors égale, en u.a, à $\dfrac{OM_0\times H_1M_1}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{24}$



Partie B

1.
$$OM_k = |z_{M_k}| = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = \left|1+\frac{k}{n}\right|\times\left|\text{e}^{\text{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}$$

2. Par hypothèse, on a : $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{2k\pi}{n}}$. Puisque $1+\dfrac{k}{n} > 0$, alors $\arg(z_k) = \dfrac{2k\pi}{n}$ $[2\pi]$.

Par suite :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) = Arg\,(z_k) = \frac{2k\pi}{n}\ [2\pi] \qquad \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = Arg\,(z_{k+1}) = \frac{2(k+1)\pi}{n}\ [2\pi]$$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) &= \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\\ &= -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}\ [2\pi]\end{aligned}$$

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, notons H_{k+1} le pied de la hauteur issue du point M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.

- Si $n = 2$, le triangle OM_0M_1 est plat : on a alors $M_1H_1 = 0$

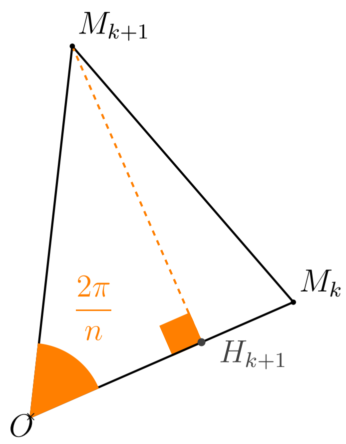
• Supposons $n \geqslant 3$:
Que H_{k+1} appartienne à la demi-droite $[OM_k)$ (si $n \geqslant 3$) ou non (si $n = 3$), on a :

$$\sin \frac{2\pi}{n} = \sin\left(\overrightarrow{OM_k}\,,\,\overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \sin \widehat{H_{k+1}OM_{k+1}}$$

$$= \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{1+\dfrac{k+1}{n}}$$

Finalement :

$$M_{k+1}H_{k+1} = \left(1+\frac{k+1}{n}\right) \times \sin \frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$



4.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,848

5. La ligne à compléter est

L3 : Tant que A < 7,2

Remarque : on obtient n = 20.

Exercice 3 **6 points** **Commun à tous les candidats**

Partie A

1. $\forall x \neq 0\ ,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$
Donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. (a) $f = u\mathrm{e}^v \Longrightarrow f' = u'\mathrm{e}^v + u\left(v'\mathrm{e}^v\right) = (u' + uv')\mathrm{e}^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1 - x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -2x \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}$

(b) Tableau de variations de la fonction f.
$\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\left(1-2x^2\right) = \left(1 - x\sqrt{2}\right)\left(1 + x\sqrt{2}\right)$
on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	$\searrow$	0

On remarque que f est impaire donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Partie B

1. Il semblerait que C_f soit toujours en dessous de C_g
2. Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ et $\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$
   On en déduit que sur $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) > 0$
   On a donc bien $\forall x \in]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$
3. (a) $f(x) \leqslant g(x) \iff x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{1-x}$
   si $x > 0$ alors cette inéquation est équivalente à $\ln\left(x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right)$ car la fonction $\ln$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   $\ln\left(x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right) \iff \ln(x) + \ln\left(\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right) \iff \ln(x) + 1 - x^2 \leqslant 1 - x \iff \ln(x) - x^2 + x \leqslant 0$.
   Finalement si $x > 0$, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$.
   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   (b) $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x} = \dfrac{(x-1)(-2x-1)}{x} = \dfrac{(1-x)(2x+1)}{x}$
   or sur $]0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{2x+1}{x} > 0$ donc $\Phi'(x)$ est du signe de $(1-x)$
   on en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   (c) Sur $]0\ ;\ +\infty[$, Φ admet 0 pour maximum donc $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4. (a) La conjecture est validée puisque l'on vient de montrer que $\Phi(x) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ or on avait montré que $f(x) < g(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$
   Finalement C_f est bien toujours en dessous de C_g sur $\mathbb{R}$

   (b) $f(x) = g(x) \iff \Phi(x) = 0 \iff x = 1$
   $A(1\ ;\ 1)$ est donc l'unique point commun de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

   (c) g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$
   alors $g'(1) = -1$ or $f'(1) = -1$
   Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente en A

EXERCICE 4   4 points   Commun à tous les candidats

1. **Réponse b.** A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2 d'après l'égalité des modules. D'après les valeurs des arguments A, O et B sont alignés donc $[AB]$ est un diamètre du cercle. Puisque C est sur le cercle et distinct de A et B, on en déduit que ABC est rectangle en C.
2. **Réponse a.** $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,28$. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,3$.
   $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,24$.
   D'où $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,28 + 0,24 = 0,52$.
3. **Réponse a.** $x > 2$ et si $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$ alors $\ln x(x-2) = \ln 3$, d'où $x(x-2) = 3$. Cette équation s'écrit $x^2 - 2x - 3 = 0$ et a pour solution -1 et 3. La seule solution acceptable est 3.
4. **Réponse d.** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$.

EXERCICE 2 5 points Exercice spécialité mathématiques

Partie A : préliminaires

1. (a) $n^2 \equiv N-1 \quad \text{modulo } N \Rightarrow \left(n^2\right)^2 \equiv (N-1)^2 \quad \text{modulo } N$
   Or $(N-1)^2 = N^2-2N+1$ et $N^2 \equiv 0 \quad \text{modulo } N$ et $-2N \equiv 0 \quad \text{modulo } N$, donc $(N-1)^2 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$ et finalement car $n^4 = n \times n^3$,
   $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.
   (b) On a $5^2 = 25 = 26-1$, donc $5^2 \equiv -1 \quad \text{modulo } 26$.
   La question précédente montre que $5 \times 5^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.
   Donc $k_1 = 5^3 = 125$.
2. (a) $6A = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$, donc $6A - A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I$ (I matrice unité).
   (b) On a $6A - A^2 = A(6I-A) = 5I$ ou encore $A \times \dfrac{1}{5}(6I-A) = I$: cette égalité montre que la matrice A est inversible et que son inverse est
   $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(6I-A) = \dfrac{6}{5}I - \dfrac{1}{5}A.$
   (c) $A^{-1} = \dfrac{6}{5}I - \dfrac{1}{5}A \iff 5A^{-1} = 6I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = B.$
   Conclusion $B = 5A^{-1}$.
   (d) En partant de l'égalité précédente :
   $B = 5A^{-1} \iff BA = 5A^{-1}A \iff BA = 5I \iff BAX = 5IX \iff BY = 5X.$

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

« ET » est codé par la matrice $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Puis $Y = AX = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}$, puis $R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ et d'après le tableau « ET » est codé « JY ».

Partie C : procédure de décodage

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. On a $Y = AX \iff A^{-1}Y = X \iff 5A^{-1}Y = 5X = BY$ soit $Y = AX \iff \left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array}\right.$
2. La question 1. b. de la **partie A** a admis que $5 \times 21 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$. Donc en reprenant le système de la question précédente et en multipliant par 21, on obtient :
   $\left\{\begin{array}{rcl} 21 \times 5x_1 & = & 21 \times (2y_1 - y_2) \\ 21 \times 5x_2 & = & 21 \times (-3y_1 + 4y_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 21 \times 5x_1 & = & 42y_1 - 21y_2 \\ 21 \times 5x_2 & = & -63y_1 + 84y_2 \end{array}\right.$
   $\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \quad \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \quad \text{modulo } 26 \end{array}\right.$
3. « QP » est associé à la matrice $\begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}$.
   En utilisant le résultat précédent :
   $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \quad \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \quad \text{modulo } 26 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 256 + 75 \quad \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 240 + 90 \quad \text{modulo } 26 \end{array}\right.$
   $\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 331 \quad \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 330 \quad \text{modulo } 26 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 19 \\ x_2 & = & 18 \end{array}\right.$
   Le mot décodé est donc « TS ».