

Durée : 4 heures.

L'exercice de spécialité sera traité sur une feuille séparée.

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les élèves

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_n \leq e^2.$$

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 (b) En déduire la convergence de la suite (u_n) .
3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

- (c) En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .
 (d) Calculer la limite de la suite (u_n) .

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0 .

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2020$, alors la suite (u_n) est croissante. »

Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq e^2$. »

Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

EXERCICE 2 5 points

A traiter par les élèves qui ne suivent pas l'enseignement de spécialité mathématique.

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautilus à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

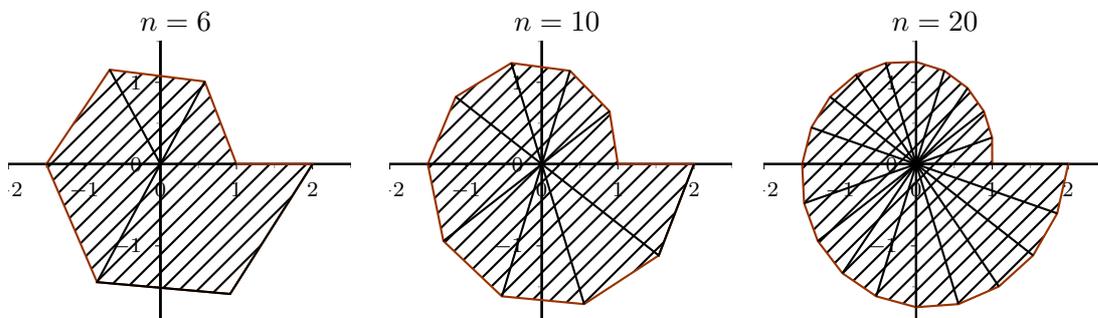
On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n , on définit les nombres complexes

$$z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

et on note M_k le point d'affixe z_k .

Dans ce modèle, le pourtour du nautilus est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leq k \leq n$.
 Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

- Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
- Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k .
- Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.
En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.
- Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
- On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$.

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n pour un entier naturel $n > 0$:

A prend la valeur 0
 Pour k allant de 0 à $n - 1$
 A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
 Fin Pour

A est un nombre réel, k et n sont des entiers naturels avec $n > 0$.

On choisit pour l'algorithme la valeur $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

- On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

Recopier et compléter la ligne $L3$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 7,2$. On ne demande pas de déterminer n .

L1	n prend la valeur 2
L2	A prend la valeur 0
L3	Tant que
L4	n prend la valeur $n + 1$
L5	A prend la valeur 0
L6	Pour k allant de 0 à $n - 1$
L7	A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
L8	Fin Pour
L9	Fin Tant que

EXERCICE 2 5 points

A traiter par les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité mathématique sur une feuille séparée.

Partie A : préliminaires

1. (a) Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \pmod{N}.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \pmod{N}$.

- (b) Dédurre de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \pmod{26}$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leq k \leq 25$ et $5k \equiv 1 \pmod{26}$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer la matrice $6A - A^2$.
 (b) En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.
 (c) Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.
 (d) Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que :
$$\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}.$$

2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ».

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les élèves

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x e^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,
 $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. (a) On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa dérivée.
 Démontrer que pour tout réel x ,

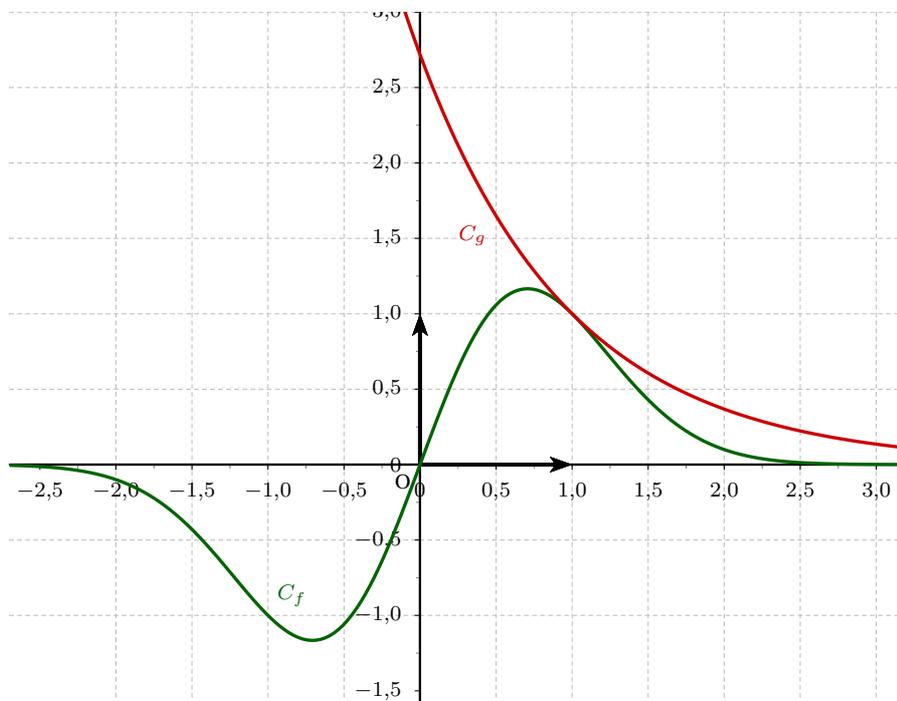
$$f'(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2}.$$

(b) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

(a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- (b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
- (c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
4. (a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
- (b) Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un unique point commun, noté A .
- (c) Montrer qu'en ce point A , ces deux courbes ont la même tangente.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les élèves

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. On considère dans le plan complexe d'origine O , trois points distincts A , B et C d'affixes z_A , z_B et z_C .

$$\text{On suppose : } |z_A| = |z_B| = |z_C| = 2, \arg z_A = \frac{\pi}{4} \text{ et } \arg z_B = \frac{5\pi}{4}.$$

On peut affirmer que :

- a. ABC est équilatéral b. ABC est rectangle c. OAB est isocèle d. OAB est rectangle

2. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,7$, $P_A(B) = 0,4$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,06$.

On peut affirmer que :

- a. $P(B) = 0,52$ b. $P(B) = 0,3$ c. $P(B) = 0,6$ d. $P(B) = 0,34$

3. On considère l'équation $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$ d'inconnue x .

Cette équation admet :

- a. Une unique solution b. Deux solutions c. Aucune solution d. La solution $x = \frac{5}{2}$

4. On considère des événements A et B de probabilités respectives : $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,5$.

Les événements A et B sont indépendants si :

- a. $P(A \cup B) = 0,7$ b. $P_A(B) = 2,5$ c. $P_A(B) = 0,4$ d. $P(A \cap B) = 0,1$