Cours de Terminale S

V. B. et S. B.
Lycée des Eucalyptus Nice

20 décembre 2014

Table des matières

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Raisonnement par récurrence

1.1.1 Introduction

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

$$\text{pour } n = 2 : \qquad 1 + 2 = 3 \ \text{ et } \ \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$\text{pour } n = 3 : \qquad 1 + 2 + 3 = 6 \ \text{ et } \ \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Idée : Le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré). Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.

1.1.2 Principe de récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

1.1.3 Exemple

Montrons que $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : montrons que P_n est vraie au rang 1, c'est-à-dire que P_1 est vraie :

$\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$; c'est vérifié.

Hérédité : supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :

$$1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que : $1+2+\ldots+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Or $1+2+\ldots+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. cqfd

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire : $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.2 Comportement d'une suite numérique

Par "étudier le comportement de la suite (u_n)", on sous-entend étudier les propriétés du nombre u_n lorsque l'entier n devient de plus en plus grand (variations, encadrement, comportement à l'infini ...).

1.2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- bornée si pour tout $n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemples

- Soit la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.
  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.

- Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$.
  Cette suite est aussi minorée par 0 et par tout réel négatif ; en plus ici, 0 est le minimum de la suite atteint au rang 0.

1.2.2 Limite finie d'une suite

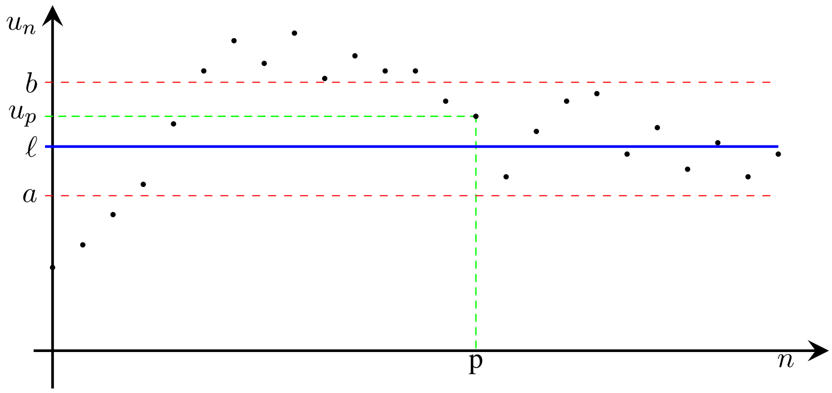
Définitions

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

Interprétation graphique :



1.2.3 Limite infinie d'une suite

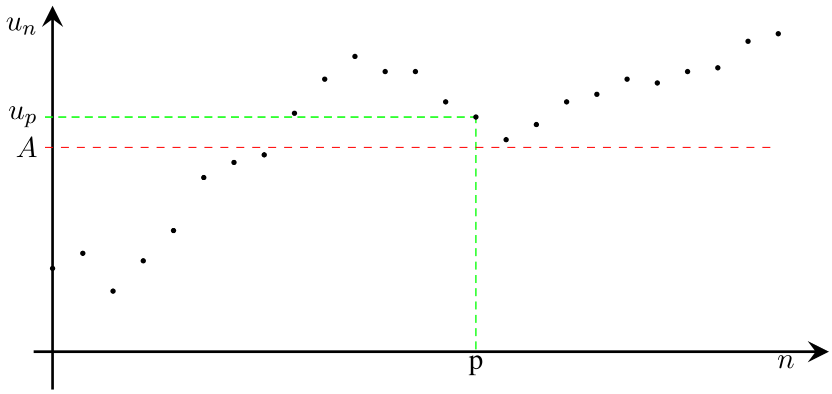
Définitions

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty \quad \text{(resp. } -\infty)$$

Interprétation graphique :



1.2.4 Limites des suites usuelles

Théorèmes

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

Preuve de $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Si $A > 0$, pour tout entier $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$, car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Soit N le plus petit entier tel que $N > \sqrt{A}$; alors $\forall n \geq N$ on a $n^2 > A$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

1.3 Opérations sur les limites

1.3.1 Somme de deux suites

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.

F. I. = forme indéterminée ; on ne connait pas à priori la réponse.

1.3.2 Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ R. S.	F. I.

R. S. = règle des signes.

1.3.3 Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ R. S.	$\pm\infty$ R. S.	F. I.

1.3.4 Exemple

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$\lim_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} (3n+5) = +\infty$

Donc par quotient : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n+5} = 0$.

1.3.5 Formes indéterminées

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Le principe est toujours le même pour "lever" une indétermination : il faut changer l'écriture de la suite.

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n-5) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 - n - 5 =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2}) = 3$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n+7) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \frac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \frac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}, \quad (n \neq 0),$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (3 + \dfrac{5}{n}) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2 + \dfrac{7}{n}) = -2$, donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}$.

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}) = 1$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

1.4 Limites et comparaison

1.4.1 Comparaison

Théorèmes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Majoration : si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A; +\infty[$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

La démonstration est analogue pour le théorème de majoration.

Théorème "des gendarmes" (admis)
On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ. On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge également vers ℓ.

1.4.2 Cas des suites monotones et convergentes

Théorème
Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ. Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.

1.5 Convergence de certaines suites

1.5.1 Convergence des suites monotones

Théorème
Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.
Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.

Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant, ou un minorant, de la suite.

Corollaire : une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$, d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

1.5.2 Limite d'une suite géométrique

Théorème
Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;
  $(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1 + ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.
  On en déduit que $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$ car $1 + a > 0$.
  Ainsi : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$ car $ka^2 > 0$, et P_{k+1} est vraie.

– Conclusion : Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.
Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.
Donc d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

2.1 Probabilité conditionnelle

2.1.1 Définition

Soit P une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2.1.2 Propriétés

• P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

$$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$
$$P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

Et pour tout événements B et C incompatibles, ($B \cap C = \emptyset$), on a : $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

• $P_A(A) = 1$

• si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$

• $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Démonstration :

– $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

– $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$
car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$

– $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$
car $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
donc $P_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - P_A(B)$

2.1.3 Probabilité d'une intersection

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
de même :
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

On en déduit que :

pour tous événements A et B de probabilité non nulle, $$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Remarque : si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = 0$.

2.1.4 Représentation par un arbre pondéré

Exemple : tous les élèves de Terminale d'un lycée ont passé un test de certification en Anglais. 80% ont réussi le test. Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé. Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les évènements T : « L'élève a réussi le test » et D : « L'élève a déjà redoublé ».

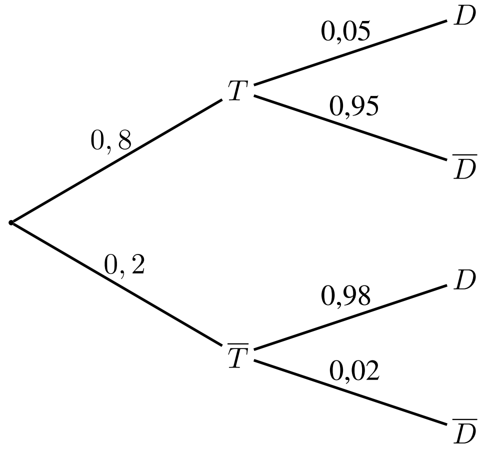
On peut représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré, en respectant certaines règles.

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.



Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est
la somme des probabilités des chemins conduisant
à cet évènement.

Par exemple, ici : $P(D) = P(D \cap T) + P(D \cap \overline{T}) = 0,05 \times 0,8 + 0,98 \times 0,2 = 0,236$

2.2 Formule des probabilités totales

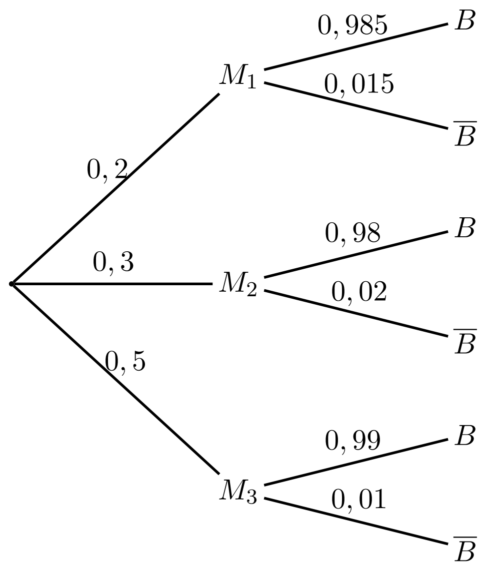
2.2.1 Exemple

Trois machines M_1, M_2, et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production d'une entreprise. On estime à $1,5\%$, 2% et 1% les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3. On choisit une pièce au hasard dans la production.

L'objectif est de calculer la probabilité de l'évènement B : « La pièce est bonne ».

Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'évènement : « La pièce est produite par M_i ».

On peut illustrer la situation par un arbre pondéré :



On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :
$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$

On peut détailler les calculs dans le tableau suivant :

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3	$0,5 \times 0,99$	$0,5 \times 0,01$	$P(M_3) = 0,5$
	$P(B) = 0,986$	$P(\overline{B}) = 0,014$	1

2.2.2 Cas général : formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, ..., A_n sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Théorème (admis) :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque de Ω, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

2.3 Indépendance

2.3.1 Evénéments indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles.

Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Alors $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc A est indépendant de B.

D'où la **définition** :

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Noter que si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0$

Remarque :
pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

"A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Si A et B sont incompatibles alors ils ne sont pas indépendants et s'ils sont indépendants alors ils ne sont pas incompatibles.

Exemple :
on lance un dé à 6 faces équilibré. On considère les évènements suivants :

A : « le résultat est pair »

B : « le résultat est 2 »

C : « le résultat est supérieur ou égal à 5 »

Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C ? Les évènements B et C ?

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$, $\quad P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{1}{6}$ d'où $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{12}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$, $\quad P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(C) = \dfrac{1}{3}$ d'où $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{6}$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

Autre méthode : $P_A(C) = \dfrac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

B et C sont incompatibles donc ne sont pas indépendants.

$\left(P(B \cap C) = 0 \text{ et } P(B) \times P(C) = \dfrac{1}{18}\right)$

2.3.2 Passage aux événements contraires

$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux événements indépendants alors } \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$

Démonstration (ROC) :
A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Donc $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

3.1 Limite d'une fonction à l'infini

3.1.1 Limite finie à l'infini

Définition :
Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Graphiquement :

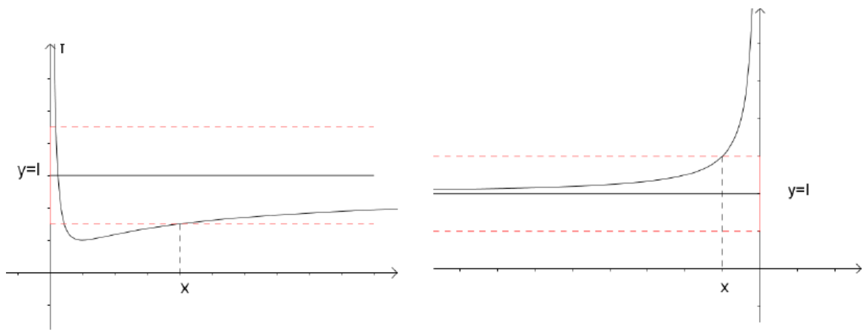


FIGURE 3.1 – *A gauche limite en* $+\infty$ *et à droite en* $-\infty$

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on dit que, dans un repère, la droite d d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemples :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

3.1.2 Limite infinie à l'infini

Définition :

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque :

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

3.2 Limite infinie d'une fonction en un réel *a*

3.2.1 Limite infinie

Définition :

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

On note $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarque :

On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

3.2.2 Limite à droite ou à gauche

Définition :

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = +\infty$).

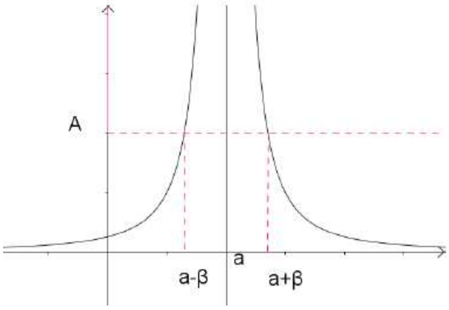
Remarque :

On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Exemples :

$\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Graphiquement :



Définition : lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3.3 Détermination de limites

3.3.1 Limites et opérations

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\ \tfrac{0}{0}\ ", "\ \tfrac{\infty}{\infty}\ "$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Limite en 2^+ et en 2^- :
$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$

On a alors une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3.3.2 Limite d'une composée

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples.

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\left(u(x)\right)$$

$$x \xrightarrow{v \circ u} v\left(u(x)\right)$$

Définition :

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Elle est notée $v \circ u$, ou parfois $v(u)$.

Pour tout réel x de I : $v \circ u(x) = v(u(x))$

Théorème :

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$

Exemple :

Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3.3.3 Limite et comparaisons

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème :

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$. Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes :

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Remarque : on obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

3.4 Continuité

3.4.1 Notion intuitive de continuité

Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).

Exemples :

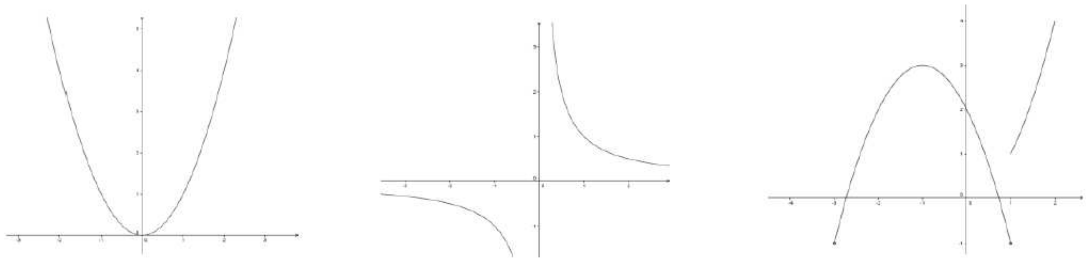


FIGURE 3.2 – *La fonction carré, la fonction inverse et une fonction f*

La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. f est définie mais pas continue sur $[-3;2]$; il y a une rupture en $x=1$.

Théorème (admis) :

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.
- Une fonction f est dérivable en a si sa courbe C_f admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0;+\infty[$.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

3.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Convention dans un tableau de variations :
Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :
– la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
– la continuité de la fonction sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I
et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe au moins un réel c compris
entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, f prend, entre a et b,
toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

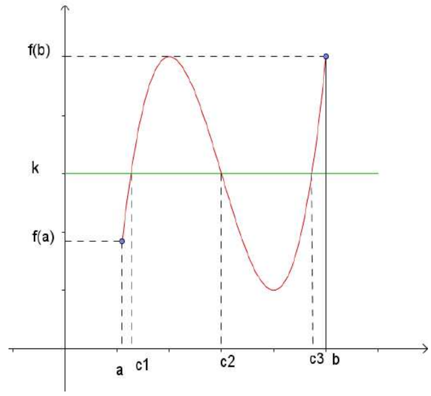


Illustration graphique

Corollaire :

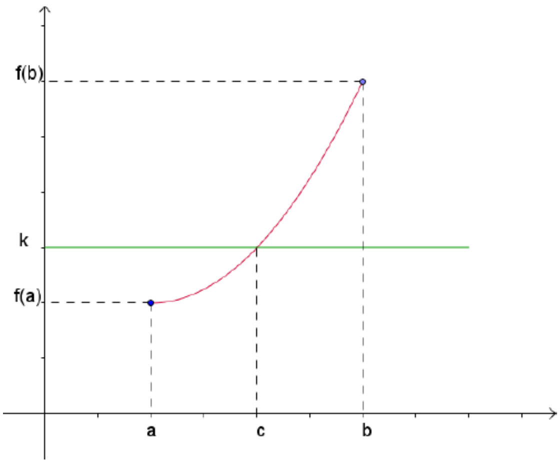
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Remarque :

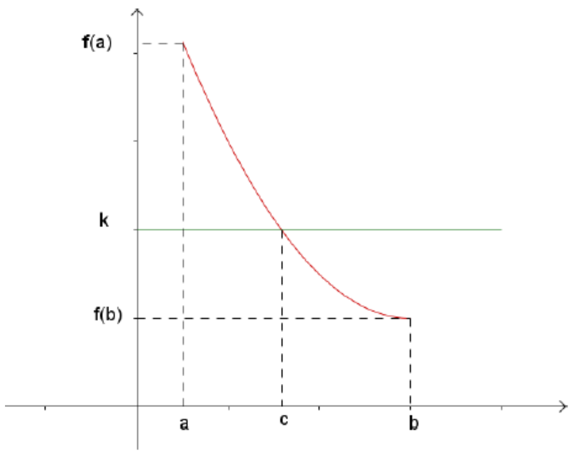
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.

Illustration graphique :

- Cas où f est strictement croissante



- Cas où f est strictement décroissante



Tableaux de variations :

x	a	c	b
$f(x)$			$f(b)$
		k	
	$f(a)$		

x	a	c	b
$f(x)$	$f(a)$		
		k	
			$f(b)$

3.5 Calcul de dérivées

3.5.1 Dérivée d'une composée

$$x \longmapsto f(ax+b)$$

Théorème :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.

Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

3.5.2 Dérivée d'une racine carrée et d'une puissance

$$x \longmapsto \sqrt{u(x)} \quad \text{et} \quad x \longmapsto (u(x))^n$$

Propriété 1 :

On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction g : $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 2 :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée

$$x \longmapsto v(u(x))$$

On admettra le résultat général : $(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x))$.

Preuve de la propriété 2 (premier point) :

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, la fonction $u^1 = u$ est dérivable sur I.
Sa dérivée est : $(u^1)' = u' = 1.u'.u^0$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. ($u^{k+1} = u^k.u$)
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' = ku'u^k + u^k.u' = (k+1)u'u^k$.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 4

Fonctions de référence 1

4.1 Les fonctions sinus et cosinus

4.1.1 Définitions

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M. On note :

$$\text{cos} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M. On note :

$$\text{sin} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$$

Ainsi, les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

4.1.2 Dérivées

Théorème admis

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \text{et} \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Calcul de dérivées

Soit a et b deux réels :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = a\cos(ax + b)$$

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = -a\sin(ax + b)$$

Démonstration :

On sait que si $f(x) = g(ax + b)$, alors $f'(x) = ag'(ax + b)$ (voir le cours sur les dérivées).
Il suffit d'appliquer cette formule en prenant pour g la fonction sinus ou la fonction cosinus.

4.1.3 Propriétés

Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \qquad \text{et} \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π.

Application : il suffit de connaître les valeurs prises par les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π pour déterminer les valeurs de ces fonctions pour tout réel x. En particulier, pour le tracé des courbes représentatives, il suffit de tracer les courbes sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ par exemple puis de compléter par des translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$. ($\vec{i}$ étant le vecteur unitaire en abscisse).

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x)=-\sin x \qquad \text{et} \qquad \cos(-x)=\cos x$$

On dit que la fonction sinus est **impaire** et que la fonction cosinus est **paire**.

Conséquence : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Application : pour le tracé des courbes représentatives dans un repère orthogonal, on peut se restreindre à l'intervalle $[0;\pi]$, puis compléter sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ à l'aide des symétries précisées ci-dessus et enfin utiliser les translations comme précédemment.

Limite

Propriété :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\dfrac{\sin(0+x)-\sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 qui est $\cos 0=1$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(0+x)-\sin 0}{x}=1.$

Fonction cosinus

x	0		π
$f'(x) = -\sin x$	0	$-$	0
$f(x) = \cos x$	1	$\searrow$	-1

Fonction sinus

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$f(x) = \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

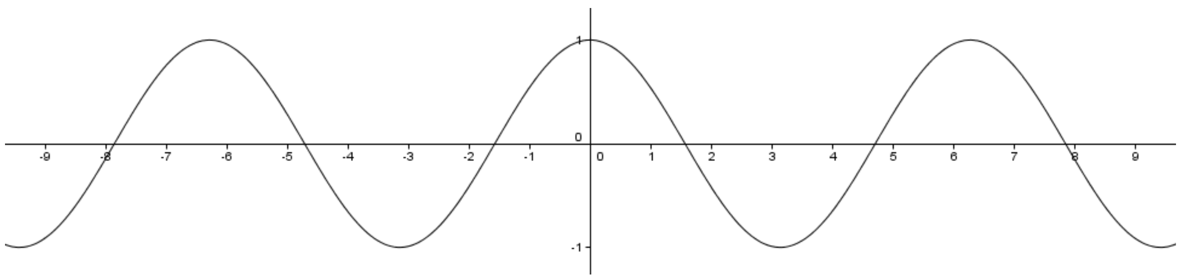


FIGURE 4.1 – *Courbe représentative de la fonction cosinus*

4.1.4 Variations et représentations graphiques

Grâce aux propriétés de périodicité et de parité énoncées plus haut, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.

Le signe des fonctions dérivées s'obtient avec le cercle trigonométrique.

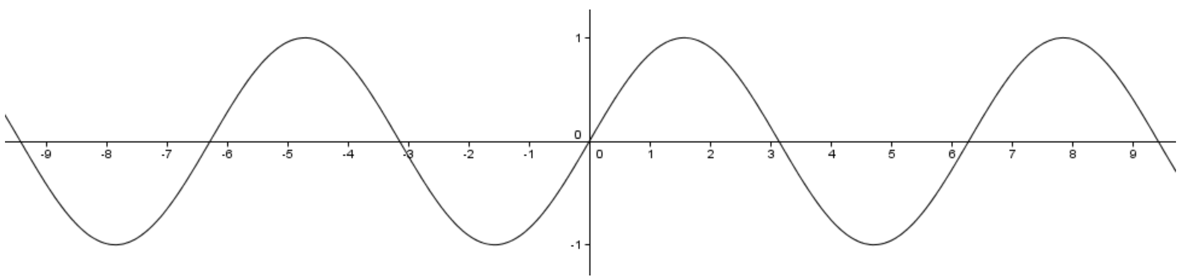


FIGURE 4.2 – *Courbe représentative de la fonction sinus*

4.2 La fonction exponentielle

4.2.1 Théorème et définition

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,
soit $\exp(x)\exp(-x) = 1$, d'où on conclut que $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration du théorème

L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut définir pour tout x réel une fonction u par $u(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(x)}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.
Alors $(u(x))' = \dfrac{g'(x)\exp(x) - g(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2} = \dfrac{g(x)\exp(x) - g(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$
La fonction u de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $u(0) = 1$, on en déduit que $u(x) = 1$ pour tout x réel. Ceci signifie que $g(x) = \exp(x)$ pour tout x réel.

Propriété :

la fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.
Démonstration : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$; s'il existe un réel x tel que $\exp(x) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe a réel tel que $\exp(a) = 0$. Or ceci est impossible puisque pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

4.2.2 Relation fonctionnelle

Théorème

Quels que soient les réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$$

Démonstration :

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel, $g(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(x)}$;

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \frac{\exp'(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$= \frac{\exp(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp(x)}{(\exp(x))^2}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

soit $g(x) = g(0) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a)$ pour tout x réel.

En particulier pour $x = b$, on obtient $g(b) = \dfrac{\exp(a+b)}{\exp(b)} = \exp(a)$

d'où on déduit que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2})) = \left(\exp(\frac{x}{2})\right)^2$.

Puisqu'un carré est positif et que $\exp(x) \neq 0$, on montre à nouveau que $\exp(x) > 0$ pour tout x.

Propriétés

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)} \qquad \exp(na) = (\exp a)^n$$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a-b)+b) = \exp(a-b)\exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- l'égalité précédente avec $a = 0$ donne $\exp(-b) = \dfrac{\exp(0)}{\exp(b)} = \dfrac{1}{\exp(b)}$

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ;
soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$.

Alors $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$ d'après l'hypothèse de récurrence,

donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, si n est un entier relatif négatif, $\exp(na) = \dfrac{1}{\exp(-na)}$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

On en déduit que : $\exp(na) = \dfrac{1}{(\exp(a))^{-n}} = (\exp a)^n$.

Notations

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle : $\exp(1) = \mathrm{e}$.

$\mathrm{e} \simeq 2,718\ldots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π.

On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

On peut donc écrire : $\mathrm{e}^0 = 1$ et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{-b} = \frac{1}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$$

De plus, quels que soient les réels a, b : $\mathrm{e}^{ab} = (\mathrm{e}^a)^b$
Par exemple : $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^x$ donc $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$ et en particulier, $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

4.2.3 Variations et limites

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par définition, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$ pour tout x réel ; puisque sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on conclut que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire :

$$a < b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \qquad \text{et} \qquad a = b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$$

En particulier : si $x < 0$ alors $\mathrm{e}^x < 1$ et si $x > 0$ alors $\mathrm{e}^x > 1$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x - x$.

$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x)\geq 0$. La fonction f est donc croissante et de plus $f(0)=1$.

On en déduit que, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f(x)>0$ d'où : $\mathrm{e}^x > x$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x=+\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\mathrm{e}^x=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim\limits_{X\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^X}=0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent).

Tableau de variation et représentation graphique

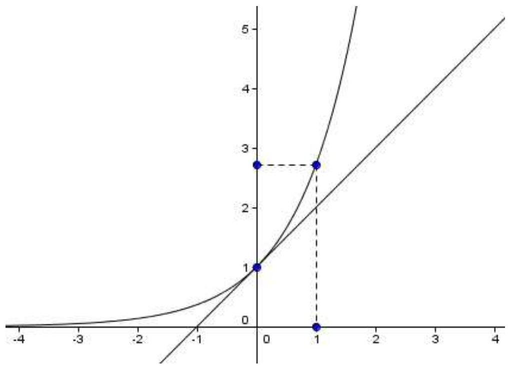
On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.

La courbe passe par les points de coordonnées $(0;1)$ et $(1;\mathrm{e})$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\mathrm{e}^0=1$.

Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\mathrm{e}^x=0$, la courbe représentative de la fonction exponentielle admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y=0$, soit l'axe des abscisses.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)=\exp x$	$+$	
$f(x)=\exp x$	0 $\nearrow$	$+\infty$



4.2.4 Compléments

Calcul de limites

Théorème

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\longrightarrow-\infty}x\mathrm{e}^x=0$$

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{x^2}{2}$.

$g'(x)=\mathrm{e}^x-x$ et d'après la démonstration précédente, $g'(x)>0$.

La fonction g est donc croissante et de plus $g(0)=1$.

On en déduit que, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g(x)>0$, soit $\mathrm{e}^x>\frac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}>\dfrac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x\mathrm{e}^x=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim\limits_{X\longrightarrow+\infty}-\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}=0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent.)

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{\mathrm{e}^{0+x} - \mathrm{e}^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{0+x} - \mathrm{e}^0}{x} = 1$.

Calcul de dérivées

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k \exp(-kx)$$

Plus généralement, on montre que :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(\mathrm{e}^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : $(\exp(-kx^2))' = -2kx \exp(-kx^2)$

Chapitre 5

Les nombres complexes

5.1 Les nombres complexes

5.1.1 Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.

5.1.2 Vocabulaire

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

5.1.3 Conséquences

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\mathcal{I}m(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que $\mathcal{R}e(z) = 0$

5.1.4 Propriétés

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :
$$a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$
- En particulier :
$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

5.2 Opérations sur les complexes

5.2.1 Calculs

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.

- produit : $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + bi} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$

5.2.2 Conjugué

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = 4$; si $z = -2i$ alors $\overline{z} = 2i$.

Conséquence : Si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

Il en resulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \overline{z}$".
- "Le nombre complexe z est imaginaire pur" équivaut à "$z + \overline{z} = 0$".

Propriétés
$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\qquad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ $\qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.
si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
Remarque
$\overline{\overline{z}} = z$ $\qquad z\overline{z} = a^2 + b^2$

5.3 Equation du second degré à coefficients réels

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels, a toujours des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle : $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

- si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ avec } z_2 = \overline{z_1}.$$

Conséquence
Dans $\mathbb{C}$, le trinôme az^2+bz+c se factorise toujours sous la forme : $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Démonstration
On met le trinôme az^2+bz+c sous la forme canonique :

$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Puisque $a\neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2+bz+c=0$, c'est résoudre

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

• si $\Delta>0$ ou si $\Delta=0$, on sait que l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ et deux seulement (distinctes ou égales). Elle a donc deux solutions complexes et deux seulement puisque $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

• si $\Delta<0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2=-1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2=\Delta$. Donc :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Ainsi l'équation a deux solutions :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et } z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec } z_2=\overline{z_1}.$$

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2-12z+153=0$

On calcule le discriminant : $\Delta=(-12)^2-4\times 4\times 153=-2304=(48i)^2$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{12-48i}{8}=\frac{3}{2}-6i \text{ et } z_2=\frac{12+48i}{8}=\frac{3}{2}+6i$$

$$S=\{\frac{3}{2}-6i;\frac{3}{2}+6i\}$$

5.4 Représentation géométrique d'un nombre complexe

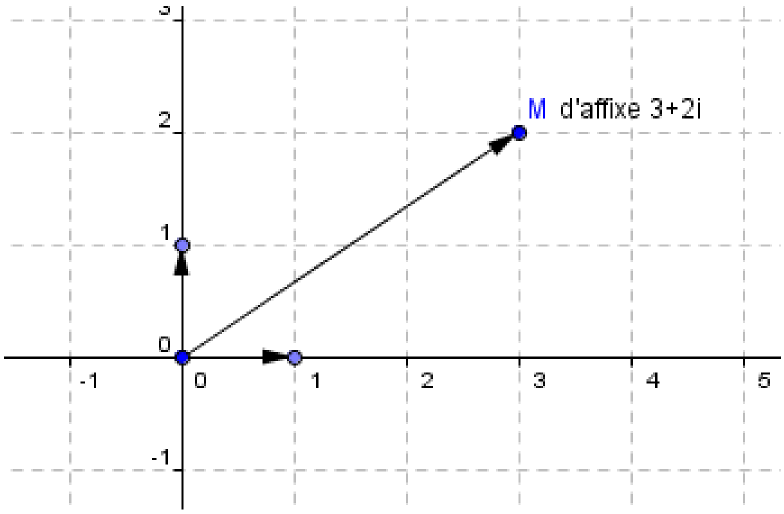
5.4.1 Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$:

• à tout complexe $z=a+bi$ avec a et b réels, on associe le point $M(a;b)$ et le vecteur $\vec{w}$ $(a;b)$ appelés point image et vecteur image de z.

• à tout point $M(a;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}$ $(a;b)$ on associe le nombre complexe $z=a+bi$, appelé affixe de M et affixe de $\vec{w}$.

Le plan est alors appelé plan complexe.



5.4.2 Remarques

• Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.

• Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires.

5.4.3 Propriétés

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- $\lambda\,\vec{w}$ a pour affixe λz.

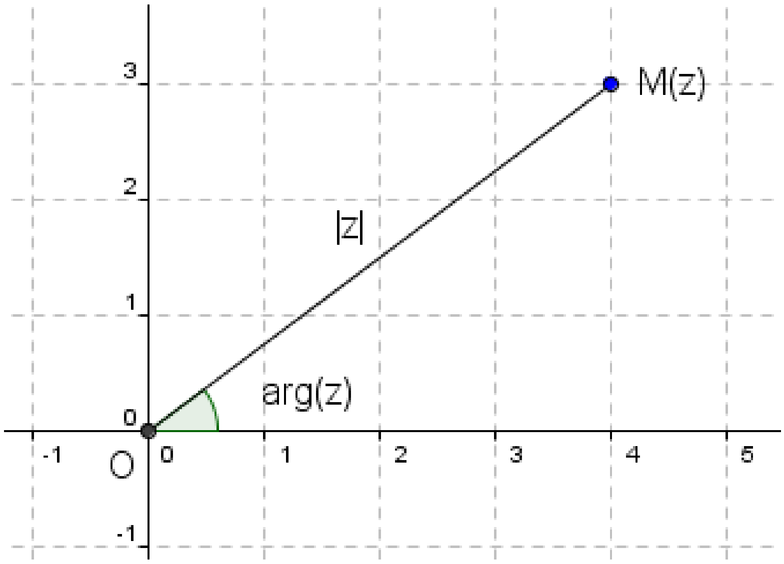
Preuve :
Il s'agit simplement d'une autre écriture des propriétés déjà connues pour les coordonnées.

5.5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

5.5.1 Module et argument

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Définition

Soit z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe. Le **module** de z, noté $\|z\|$, est la distance OM : $\|z\| = OM$. Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$: $arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi)$.



Exemples
$|i| = 1 \;\; arg(i) = \frac{\pi}{2} \;\; (2\pi)$
$|-3| = 3 \;\; arg(-3) = \pi \;\; (2\pi)$

Propriétés
- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$arg(-z) = arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$arg(\overline{z}) = -arg(z) \quad (2\pi)$$

- z est un réel, $(z \neq 0)$, si et seulement si $arg(z) = 0 \quad (\pi)$.
- z est un imaginaire pur, $(z \neq 0)$, si et seulement si $arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

5.5.2 Forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{avec} \quad r = |z| \text{ et } \theta = arg(z) \quad (2\pi)$$

5.5.3 Passage d'une forme à l'autre

- Si la forme algébrique de z est $z = a + bi$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ tel que $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + bi$ avec $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.

5.5.4 Propriétés

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

Module : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ Argument : $arg(zz') = arg(z) + arg(z') \quad (2\pi)$

- Puissance

Module : $|z^n| = |z|^n$ Argument : $arg(z^n) = n\, arg(z) \quad (2\pi)$

- Inverse

Module : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ Argument : $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z) \quad (2\pi)$

- Quotient

Module : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ Argument : $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z') \quad (2\pi)$

- Somme

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq [z| + |z'|$

- Géométrie

Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

$$|z_B - z_A| = AB \text{ et } arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi)$$

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA} \text{ et } arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi)$$

Par conséquent, les points A, B et C sont alignés si et seulement si $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0 \quad (\pi)$

et les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$

5.6 Notation exponentielle et applications.

5.6.1 Notation exponentielle

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta = arg(z) \ (2\pi)$.

On note f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
On se propose de démontrer que pour tous réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\ &= [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'] + i[\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta] \end{aligned}$$

Soit :$f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$

De plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. L'égalité $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors $\mathrm{e}^{i\theta}\times\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$, ce qui justifie cette notation exponentielle.

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $\mathrm{e}^{i\theta}$ avec :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Exemples
$\mathrm{e}^{i\pi} = -1$; $\quad \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et } \theta = arg(z) \quad (2\pi)$$

5.6.2 Propriétés

Pour tout réels θ et θ' :

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\mathrm{e}^{i\theta}\times\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} \qquad \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$$

5.6.3 Applications en trigonométrie

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\times\mathrm{e}^{-i\theta'}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta]\times[\cos\theta' - i\sin\theta'] \\ &= \cos\theta\cos\theta' - i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \\ &= [\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'] + i[\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta']\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :
$\cos(\theta-\theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta-\theta') = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$
Autre exemple :
$\mathrm{e}^{i(\theta+\theta)} = \mathrm{e}^{2i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}\times\mathrm{e}^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :
$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Chapitre 6

Fonctions de référence 2

6.1 La fonction logarithme népérien

6.1.1 Définition et propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que quel que soit le réel a strictement positif, il existe un réel unique x tel que $\mathrm{e}^x = a$.

Définition

Si a est un réel strictement positif, la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^x = a$, d'inconnue x, s'appelle **logarithme népérien** de a, et on note $x = \ln a$.

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \longmapsto \ln x$.
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

$$y = \ln x \iff \mathrm{e}^y = x$$

On dit que la fonction $\ln$ est la **fonction réciproque** de la fonction $\exp$.

Ainsi : $\ln 1 = 0$ puisque $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\ln \mathrm{e} = 1$ puisque $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
De plus : si $\ln x = y$ alors $x = \mathrm{e}^y$ et $\dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{-y}$ soit $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -y$.
On obtient donc, pour tout réel x strictement positif :

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

Propriété

Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ et pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$

6.1.2 Variations et limites

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration partielle

On admet que la fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

Si on pose $f(x) = \exp(\ln x) = x$, alors $f'(x) = \ln'(x) \times \exp(\ln x) = \ln'(x) \times x$.

Or $f'(x) = 1$, d'où $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$; puisque sa dérivée est strictement positive sur $]0;+\infty[$, on conclut que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Corollaire :

Pour tout réels a et b strictement positifs,

$$a < b \Longleftrightarrow \ln a < \ln b \text{ et } a = b \Longleftrightarrow \ln a = \ln b$$

En particulier : $0 < x < 1$ équivaut à $\ln x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln x > 0$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : quel que soit le réel A, si $x > \mathrm{e}^A$ alors $\ln x > A$; donc l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.

Ensuite : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} -\ln \dfrac{1}{x}$; or, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$

Donc, par composition, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

Tableau de variation et représentation graphique

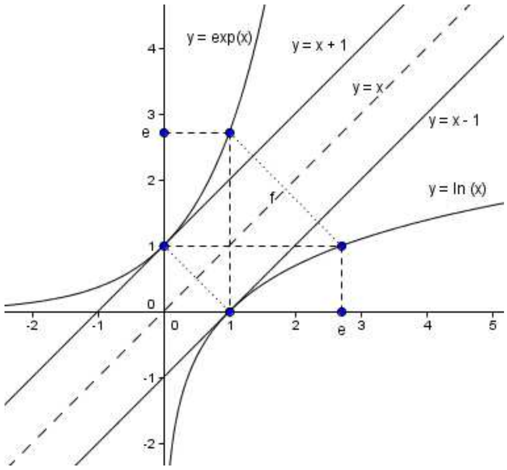
On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents. Puisque la fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$, les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La courbe passe par les points de coordonnées $(1;0)$ et $(\mathrm{e};1)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\ln'(1) = 1$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une asymptote d'équation $x = 0$, soit l'axe des ordonnées.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	$+$
$\ln x$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



6.1.3 Relation fonctionnelle

La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$. On peut donc déduire une relation fonctionnelle pour la fonction $\ln$ à partir de celle existant pour la fonction $\exp$:

pour tout réels x et y, $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$

donc $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x+y)) = x+y$;

si on pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$, soit $x = \ln a$ et $y = \ln b$ on obtient :

Théorème

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

Remarque

Si $a = b$, la relation fonctionnelle nous donne : $\ln(a^2) = 2\ln a$.

On peut alors en déduire : $\ln x = \ln((\sqrt{x})^2) = 2\ln(\sqrt{x})$, soit $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$.

Propriétés

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad \ln(a^n) = n\ln a$$

Démonstration

- La deuxième propriété a déjà été prouvée.

- pour la première propriété, on utilise la relation fonctionnelle :

$$\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b.$$

- pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n\ln a$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0\ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ;
soit $\ln(a^k) = k \ln a$.
Alors $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a$ d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1) \ln a$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, si n est un entier relatif négatif, $\ln(a^n) = \ln \dfrac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$
or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\ln(a^{-n}) = (-n) \ln a$
On en déduit que : $\ln(a^n) = n \ln a$.

6.1.4 Compléments

Calcul de limites

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration

• On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$ donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction ln). On en déduit que pour tout x strictement positif $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x}$ et donc $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Alors, pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc par application du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Remarque

On pouvait aussi écrire $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\exp(X)} = \dfrac{1}{\frac{\exp(X)}{X}}$, et appliquer les théorèmes sur la composition et l'inverse de limites.

• $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction ln en 1.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction ln en 1 qui est 1.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = 1$.

Calcul de dérivées

On montre que :

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Par exemple, on obtient pour tout $x > -\frac{b}{a}$:

$$(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$$

Remarque
u étant strictement positive, le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u'.

Cette dérivée satisfait à la formule générale :

$$(f(u(x))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

6.2 Fonction logarithme décimal

6.2.1 Définition

On appelle fonction **logarithme décimal** la fonction notée $\log$, définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

En particulier : $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$.

6.2.2 Propriétés

Les propriétés de la fonction logarithme décimal se déduisent immédiatement de celles de la fonction ln.

Par exemple, pour tout entier relatif n, $\log 10^n = \dfrac{\ln 10^n}{\ln 10} = \dfrac{n \ln 10}{\ln 10} = n$.

Dérivée

La fonction logarithme décimal est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\log'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$

Variations

La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Limites

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \log x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \log x = -\infty$$

Relations fonctionnelles

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs :

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \qquad \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b \qquad \log(a^n) = n\log a$$

Chapitre 7

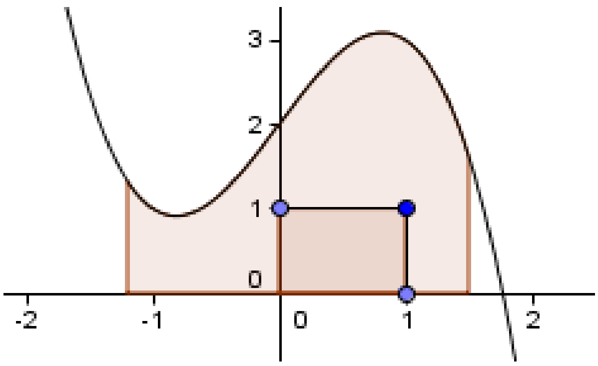
Calcul intégral

7.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

7.1.1 Définition

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

On appelle **intégrale de f sur** $[a; b]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



L'intégrale de f sur $[a; b]$ se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On dit aussi que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente **l'aire sous la courbe** entre a et b.

7.1.2 Remarque

Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \dots$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit aussi " somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ".

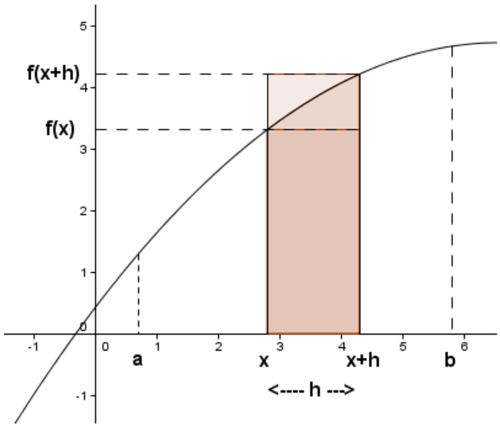
7.1.3 Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$; la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $[a;b]$.
De plus $F(a) = 0$.

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a;b]$ et $h > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses x et $x+h$.



On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ ce qui signifie que F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.

7.2 Primitives et intégrale

7.2.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que " f est la fonction dérivée de F sur I ".

7.2.2 Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a;b]$.

Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a;b]$ et on défini une fonction g sur $[a;b]$, par $g(x) = f(x) - m$;

g est continue et positive sur $[a;b]$, donc admet une primitive G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. Alors la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

7.2.3 Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de f sur I.

Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque.

7.2.4 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a;b]$ et si F est la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

7.2.5 Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

• si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I.

7.2.6 Primitives des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a \quad$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n \quad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0 : +\infty[$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b) \quad$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b) \quad$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n \quad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$I = J$	$F(x) = \mathrm{e}^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$I = K$	$F(x) = \ln u$

7.3 Intégrale d'une fonction continue

7.3.1 Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien $G(b) - G(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :

si F une primitive quelconque de f, alors $F(x) = G(x) + c$ et on vérifie alors que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

7.3.2 Définition

On généralise la notion d'intégrale :

soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

7.3.3 Exemple

$$\text{Pour } x > 0, \qquad \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

7.3.4 Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I.

–
$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

– Inversion des bornes
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$
Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

– Relation de Chasles
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

– Linéarité
si k est un réel quelconque, alors
$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

– Linéarité
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

7.4 Calcul d'aires

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

- L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a;b]$$

$$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est négative sur } [a;b]$$

- si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$A = \int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x$$

7.5 Intégrales et inégalités

7.5.1 Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Démonstration : par définition, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ *où F une primitive de f sur $[a;b]$, c'est-à-dire $F' = f$; donc, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors F est croissante sur $[a;b]$; donc $F(b) \geq F(a)$ et $F(b) - F(a) \geq 0$.*

7.5.2 Intégration d'une inégalité

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.
Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Pour la démonstration, considérer la fonction $h = g - f$.

7.5.3 Encadrement

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a;b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a;b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

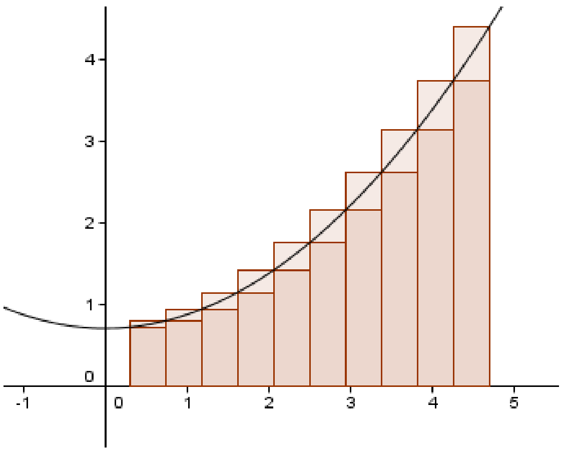
$$f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$$

Donc $hf(a+ih) \leq \displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\mathrm{d}x \leq hf(a+(i+1)h)$, où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)h)$$

On peut écrire un programme afin d'effectuer ce calcul.



Algorithme

```
VARIABLES
   a, b, n, h DU TYPE NOMBRE
   Iinf, Isup DU TYPE NOMBRE
   x DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
   Saisir a, b, n
   h PREND LA VALEUR (b-a)/n
   Iinf PREND LA VALEUR 0
   Isup PREND LA VALEUR 0
   x PREND LA VALEUR a
   POUR i variant de 0 à n-1
      Iinf PREND LA VALEUR Iinf+f(x)
      x PREND LA VALEUR x+h
      Isup PREND LA VALEUR Isup+f(x)
   FIN POUR
   Iinf PREND LA VALEUR h*Iinf
   Isup PREND LA VALEUR h*Isup
   AFFICHER Iinf, Isup
FIN ALGORITHME
```

Si la fonction f est simplement continue sur $[a;b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant, sur chaque intervalle $[a+ih;a+(i+1)h]$, $f(x)$ par $f(a+(i+1/2)h)$.

7.5.4 Valeur moyenne

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

$$\text{et si } a < b, \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M$$

Démonstration à l'aide du théorème précédent.

Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Chapitre 8

Probabilités : lois à densité

8.1 Variables aléatoires continues

Considérons une variable aléatoire susceptible de prendre n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné. Cet intervalle peut être $[0; 1]$ ou $\mathbb{R}$ par exemple. Une telle variable aléatoire est dite continue.

La durée de vie d'une ampoule électrique est un exemple de variable aléatoire continue. Dans ce cas, les valeurs prises sont dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

L'ensemble des valeurs étant infini, la probabilité d'obtenir exactement une valeur particulière est nulle en général. On cherchera donc plutôt à déterminer des probabilités du type $P(X \in I)$, où I est un intervalle, par exemple $P(a \leq X \leq b)$.

8.1.1 Densité d'une variable aléatoire continue

Définition

> Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a; b]$. Si X prend toutes les valeurs de $[a; b]$, on dit que X est continue. Dans ce cas, la densité de probabilité de la variable aléatoire X est une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que :
> $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Le produit $f(x)\mathrm{d}x$ joue, pour une variable aléatoire continue, le même rôle que la probabilité $P(x)$ pour une variable aléatoire discrète. La "somme des probabilités" est ici représentée par $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et vaut 1.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $I = [a; b]$, de densité f et J un intervalle inclus dans I, par exemple $J = [u; v]$.

• La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, est l'aire du domaine défini par $x \in J$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \displaystyle\int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

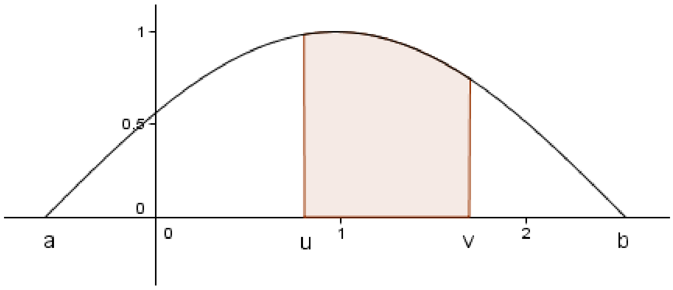


FIGURE 8.1 – Probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ avec $J = [u; v]$

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : $P(u \leq X \leq v) = P(u < X \leq v) = P(u \leq X < v) = P(u < X < v)$.

• L'événement $(X > u)$ est l'événement contraire de l'événement $(X \leq u)$, d'où : $P(X > u) = 1 - P(X \leq u)$.

• $P(u \leq X \leq v) = P(X \leq v) - P(X < u)$.

Exemple

Supposons qu'on choisisse au hasard un point sur un segment de longueur 3. La probabilité que ce point se trouve dans un intervalle donné de ce segment est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle. Le choix d'un tel point est équivalent au choix d'un nombre quelconque dans l'intervalle $[0; 3]$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}$ si $0 \leq x \leq 3$.

La fonction f est continue, positive, sur $[0; 3]$ et $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

$P(1 \leq X \leq 2) = \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 1/3$ $\qquad P(X \leq 2) = \displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2/3$

$P(X < 1) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1/3$ $\qquad P(X = 1) = \displaystyle\int_1^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$

On dit que la variable aléatoire qui a pour densité de probabilité f, suit la loi uniforme sur $[0; 3]$.

8.1.2 Loi uniforme

Définition

Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[a; b]$ si sa densité de probabilité f est définie par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{pour} \quad a \leq x \leq b$$

Propriété

$$P(u \leq X \leq v) = \int_u^v \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{v-u}{b-a}$$

Cette probabilité est proportionnelle à la longueur du segment $[u; v]$.
La loi uniforme correspond en probabilités discrètes à un tirage équiprobable dans un ensemble fini.

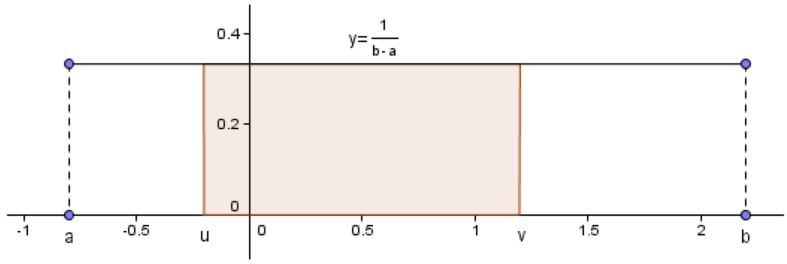


FIGURE 8.2 – Loi uniforme sur $[a; b]$: probabilité de l'événement $\{u \leq X \leq v\}$

Espérance

Pour une variable aléatoire discrète l'espérance est la somme des produits $x_i P(X = x_i)$. Pour une variable aléatoire continue à valeur dans $[a; b]$, nous définissons de manière analogue l'espérance par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

Les propriétés de l'espérance dans le cadre des variables aléatoires discrètes sont conservées ici.

Dans l'exemple 1.1.3, on a $E(X) = \int_0^3 x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{x}{3} \mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.
Ceci correspond au point milieu de l'intervalle $[0; 3]$.

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = x f(x) = \frac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \frac{x^2}{2(b-a)}$, d'où :

$$\boxed{E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} \mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}}$$

On obtient le milieu de $[a; b]$.

8.1.3 Lois exponentielles

Définition

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad \text{pour tout} \quad x \geq 0$$

Cette densité est la densité du temps de désintégration d'un atome radioactif et cette loi de probabilité intervient souvent dans les durées de fonctionnement d'un composant électronique.

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

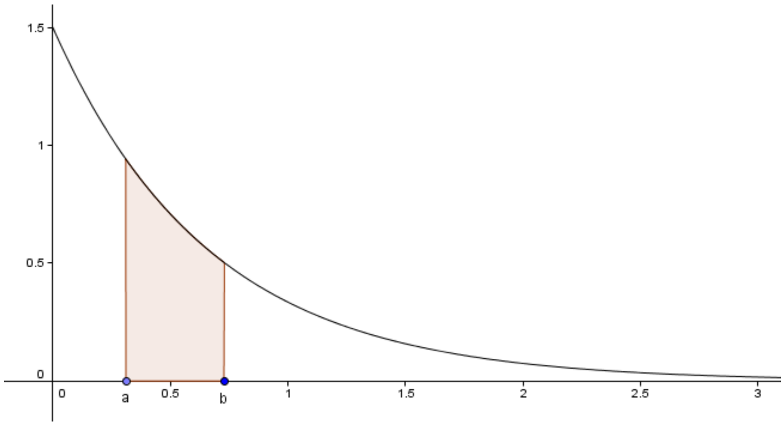


FIGURE 8.3 – Densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$ avec $P(a \leq X \leq b)$.

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = F(b) - F(0) = -\mathrm{e}^{-\lambda b} - (-\mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

Puisque $P(T \leq a) = P(T < a)$, on peut alors déduire :

$$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T \leq a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et aussi :

$$P(T > a) = 1 - P(T \leq a) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

Propriété

La loi exponentielle est "sans mémoire", T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = \frac{P(T \geq t + h)}{P(T \geq t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(T \geq h)$$

Espérance

T prend ses valeurs dans $[0; +\infty[$. Nous allons étendre la définition de l'espérance mathématique en posant :

$$E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x f(x) \mathrm{d}x$$

avec ici $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Propriété

Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.

Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient $v(x) = -e^{-\lambda x}$;
$u'(x)v(x) = -e^{-\lambda x}$, et une primitive H de $u'v$ est définie par $H(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.
Finalement, G est définie par $G(x) = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda be^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ d'où, par composition : $\lim\limits_{b\to+\infty} \lambda be^{-\lambda b} = 0$
En conclusion

$$E(T) = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

8.2 Loi normale centrée réduite

8.2.1 Définition

Une variable aléatoire continue X suit la loi normale centrée réduite si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On écrit : X suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

En calculant la dérivée, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, on constate que cette dérivée s'annule en $x = 0$, qu'elle est du signe de $-x$, et que f admet un maximum, en $x = 0$, égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De plus $f(-x) = f(x)$, la fonction f est paire, et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

C'est une courbe en forme de "cloche" dont l'aire sous la courbe est égale à 1.

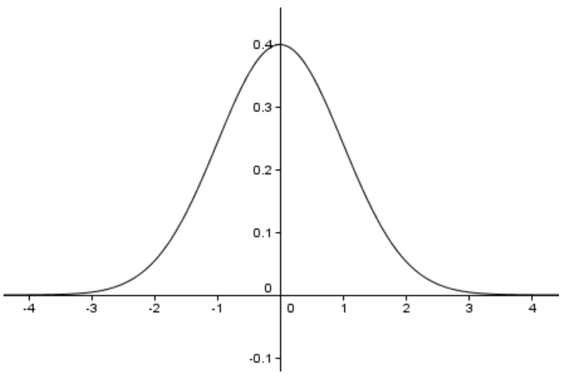


FIGURE 8.4 – Densité de la loi normale centrée réduite

Remarque : le nom "loi normale" a été donné par Henri Poincaré (fin du XIXème siècle) ; l'adjectif "normale" s'explique par le fait que cette loi décrit et modélise des situations aléatoires concrètes et naturelles. Prenons par exemple une population de 1000 personnes dont la taille moyenne est 170 cm. En traçant l'histogramme des tailles, on obtient une courbe en cloche et la population se concentre essentiellement autour de la moyenne. Ce résultat est lié au théorème qui suit.

8.2.2 Théorème de Moivre-Laplace

Ce théorème est admis ; il a été démontré par De Moivre dans le cas $p = 0,5$, puis par Laplace pour p quelconque.

Soit $p \in]0;1[$; si la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètre n et p pour tout entier naturel n non nul, et si Z_n est la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, alors, pour tous réels a et b, la probabilité $P(Z_n \in [a;b])$ tend vers $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque

np est l'espérance de X_n et $np(1-p)$ est la variance de X_n.

8.2.3 Propriétés et calculs

Calcul de probabilités

En utilisant la symétrie de la courbe de densité, on obtient : $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0,5$ et $P(X \leq -a) = P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$.

$P(X \in [a;b])$ est représenté sur la figure 5.

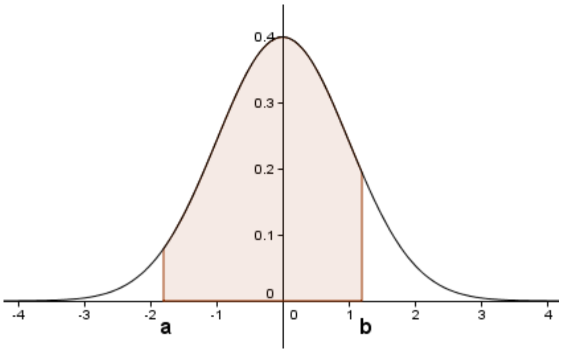


FIGURE 8.5 – $P(a \leq X \leq b)$ est l'aire de la partie colorée

Cette probabilité est donnée avec une calculatrice Casio par "**NormCD(a,b)**" (Touche OPTN, choisir STAT, puis DIST, puis NORM et Ncd) et sur Texas par "**normalFRép(a,b)**", (Menu **distrib**, choisir normalFRép).

Attention : les calculatrices ne nous donnent pas les probabilités $P(X \leq a)$.

Méthodes de calcul :

si $a > 0$, on écrit :

$$P(X \leq a) = P(X \leq 0) + P(0 \leq X \leq a) = 0,5 + P(0 \leq X \leq a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - (0,5 + P(0 \leq X \leq a)) = 0,5 - P(0 \leq X \leq a)$$

si $a < 0$, on écrit :

$$P(X \geq a) = P(a \leq X \leq 0) + P(X \geq 0) = P(a \leq X \leq 0) + 0,5$$

$$P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a) = 1 - (P(a \leq X \leq 0) + 0,5) = 0,5 - P(a \leq X \leq 0)$$

Il est conseillé de faire un dessin.

Pour la suite, on note $\Phi(t) = P(X \leq t)$ pour tout t réel, (voir figure 6). Les résultats précédents se traduisent par $\phi(0) = 0,5$ et $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.

Donc si $a > 0$ et si $b > 0$ alors

$$P(-a \leq X \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$$

et

$$P(-b \leq X \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-b) = \Phi(a) - (1 - \Phi(b)) = \Phi(a) + \Phi(b) - 1$$

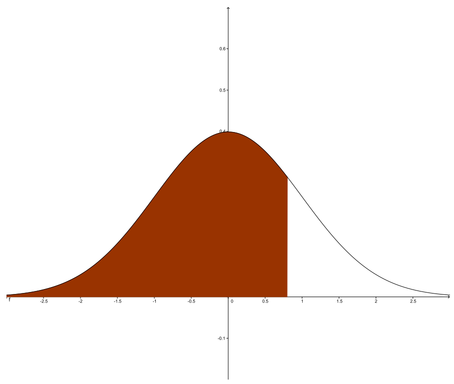


FIGURE 8.6 – Loi normale : $\Phi(0,6)$ est l'aire de la partie colorée

Valeurs remarquables

Théorème

Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Démonstration

$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 2\Phi(u_\alpha) - 1$. Donc $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ est équivalent à $2\Phi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$, soit $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} = c$ avec $c \in]0,5;1[$.

Or, pour $t \geq 0$, $\Phi(t) = P(X \leq t) = 0,5 + \displaystyle\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. Donc $\Phi'(t) = f(t)$ et Φ est la primitive de f qui prend la valeur 0,5 en 0. Φ est donc continue, strictement croissante sur $[0;+\infty[$, avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = 1$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe, pour tout réel $c \in]0,5;1[$, un réel unique k positif tel que $\Phi(k) = c$. On note ce réel u_α.

Tableau de variation de Φ :

t	0 $\qquad$ $+\infty$
$\Phi'(t) = f(t)$	$+$
$\Phi(t)$	$0,5 \nearrow 1$

On obtient le nombre u_α avec une calculatrice Casio, par "**InvNormCD(c)**" (Touche OPTN, choisir STAT, puis DIST, puis NORM et InvN), ou Texas, par "**FracNormale(c)**", (Menu **distrib**, choisir FracNormale).

Par exemple, pour obtenir $u_{0,05}$, nous devons résoudre l'équation $\Phi(u_{0,05}) = 1 - \frac{0,05}{2}$, soit $\Phi(u_{0,05}) = 0,975$.

Une calculatrice nous donne $u_{0,05} \simeq 1,96$, autrement dit : $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \simeq 0,95$.

On obtient de même : $u_{0,01} \simeq 2,58$, autrement dit : $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \simeq 0,99$.

Ces valeurs sont à retenir.

Remarque : une calculatrice nous donne en fait l'unique nombre réel k tel que $P(X < k) = c$ où $c \in]0;1[$.

8.2.4 Espérance mathématique

On pose

$$E(X) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 xf(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b xf(x)\mathrm{d}x$$

On démontre (exercice) que $E(X) = 0$.

On admet que la variance $V(X)$, définie par $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$, vaut 1.

Ceci justifie les adjectifs "centrée" et "réduite" : une variable aléatoire est dite centrée et réduite si son espérance est nulle et si son écart type vaut 1.

8.3 Lois normales

8.3.1 Définition

Une variable aléatoire continue X, d'espérance mathématique m et d'écart type σ ($\sigma > 0$) suit la **loi normale** $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ de paramètres m et σ si et seulement si la variable aléatoire $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, c'est-à-dire la **loi normale centrée réduite**.

Remarque : on dit aussi loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace, ...

La densité de probabilité f de X, définie sur $\mathbb{R}$, a une courbe représentative en forme de "cloche" qui admet la droite d'équation $x = m$ comme axe de symétrie. Elle est représentée ci-dessous, à gauche avec $m = -1$ et $\sigma = 1$, à droite avec $m = 1,4$ et $\sigma = 0,3$.

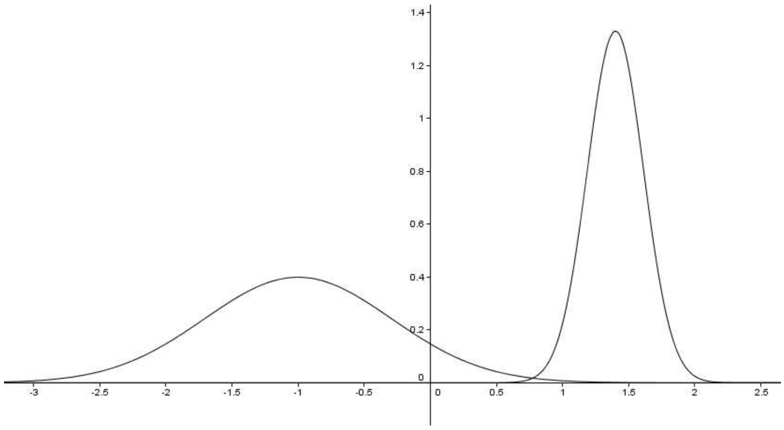


FIGURE 8.7 – Densités de lois normales : à gauche $\mathcal{N}(-1; 1)$ et à droite $\mathcal{N}(1,4; 0,09)$

8.3.2 Calcul de probabilités

La probabilité $P(X \in [a; b])$ est donnée par une calculatrice.
Casio : "**NormCD(a,b,σ, m)**" (Touche OPTN, choisir STAT, puis DIST, puis NORM et Ncd)
Texas : "**normalFRép(a,b,m,σ)**", (Menu **distrib**, choisir normalFRép).
On utilise la symétrie de la courbe densité par rapport à la droite d'équation $x = m$ et les mêmes méthodes que pour la loi normale centrée réduite. En particulier : $P(X \leq m) = P(X \geq m) = 0,5$.

Attention : les calculatrices ne nous donnent pas les probabilités $P(X \leq a)$.

Méthodes de calcul :

si $a > m$, on écrit :

$$P(X \leq a) = P(X \leq m) + P(m \leq X \leq a) = 0,5 + P(m \leq X \leq a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - (0,5 + P(m \leq X \leq a)) = 0,5 - P(m \leq X \leq a)$$

si $a < m$, on écrit :

$$P(X \geq a) = P(a \leq X \leq m) + P(X \geq m) = P(a \leq X \leq m) + 0,5$$

$$P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a) = 1 - (P(a \leq X \leq m) + 0,5) = 0,5 - P(a \leq X \leq m)$$

Il est conseillé de faire un dessin.

Remarque :

si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ et si a est un réel quelconque, en posant $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$, on obtient $P(X \leq a) = P\left(T \leq \dfrac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$

et $P(m-a \leq X \leq m+a) = P\left(-\dfrac{a}{\sigma} \leq T \leq \dfrac{a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\dfrac{a}{\sigma}\right) - 1$

Cas particuliers, (résultats obtenus avec la calculatrice), à connaître :

$$P(X \in [m-\sigma; m+\sigma]) = P(-1 \leq T \leq 1) \quad \text{soit} \quad P(X \in [m-\sigma; m+\sigma]) \simeq 0,683$$

$$P(X \in [m-2\sigma; m+2\sigma]) = P(-2 \leq T \leq 2) \quad \text{soit} \quad P(X \in [m-2\sigma; m+2\sigma]) \simeq 0,954$$

$$P(X \in [m-3\sigma; m+3\sigma]) = P(-3 \leq T \leq 3) \quad \text{soit} \quad P(X \in [m-3\sigma; m+3\sigma]) \simeq 0,997$$

Equations

Comme pour la loi normale centrée réduite, une calculatrice permet de déterminer l'unique nombre réel k tel que $P(X < k) = c$ où $c \in]0;1[$. Avec une Casio, par "**InvNormCD(**c**,** σ**,** m**)**", ou avec une Texas, par "**FracNormale(**c**,** m**,** σ**)**".

Chapitre 9

Géométrie dans l'espace

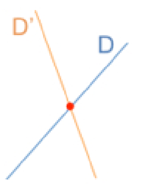
9.1 Positions relatives de droites et de plans

9.1.1 Positions relatives de deux droites

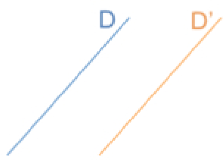
Deux droites de l'espace sont :

- soit **coplanaires** ; elles sont alors

  soit sécantes,

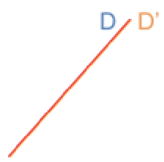


  soit parallèles, et dans ce cas elles sont

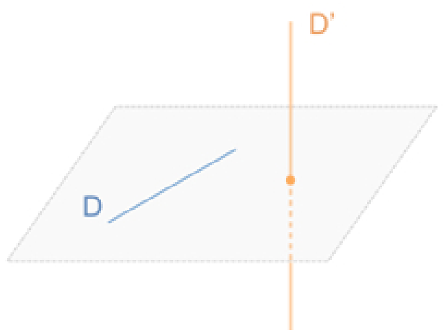


  strictement parallèles

  ou confondues

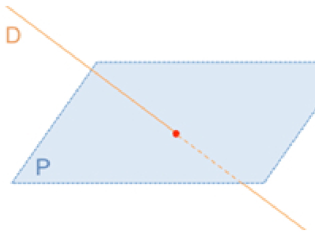


- soit **non coplanaires**

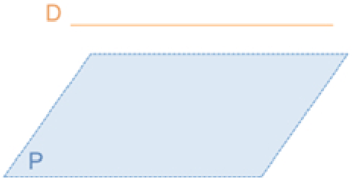


9.1.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

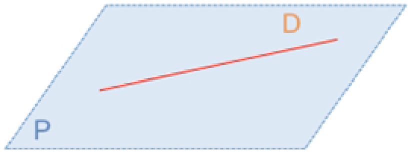
Une droite et un plan de l'espace sont :
- soit sécants, et l'intersection est alors un point ;
- soit parallèles et dans ce cas :



la droite est strictement parallèle au plan,



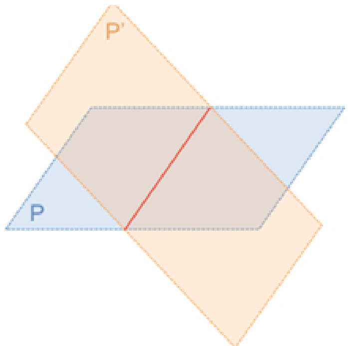
ou la droite est contenue dans le plan.



9.1.3 Positions relatives de deux plans

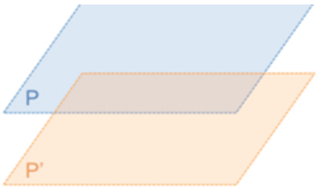
Deux plans de l'espace sont :

• soit sécants, et dans ce cas l'intersection est une droite ;



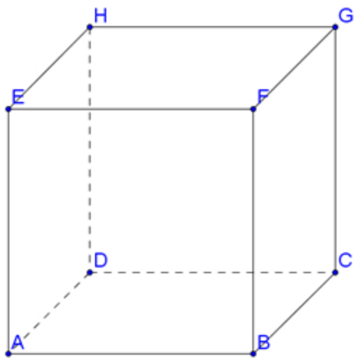
• soit parallèles, et dans ce cas ils sont

strictement parallèles,



ou confondus.

Exemple du cube



9.2 Parallélisme

9.2.1 Entre droites

- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe aussi l'autre.

9.2.2 Entre plans

- Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
- Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un second plan, alors les deux plans sont parallèles.
- Un plan coupe deux plans parallèles selon des droites parallèles.

Remarque
Toutes les propriétés de géométrie plane restent valables dans un plan de l'espace.

9.2.3 Entre droites et plans

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

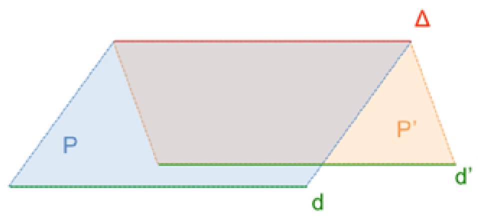
- Si une droite est parallèle à une seconde, alors elle est parallèle à tous les plans contenant cette seconde droite.

- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

- **Théorème du toit (preuve dans la suite du cours)**

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :
- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors les droites d et d' sont également parallèles à la droite Δ.

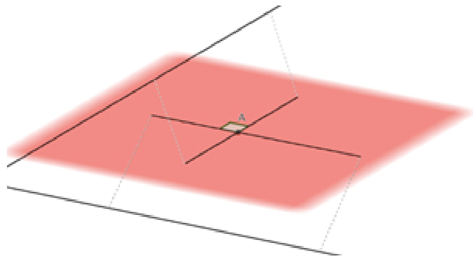


9.3 Orthogonalité

9.3.1 Orthogonalité de droites

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

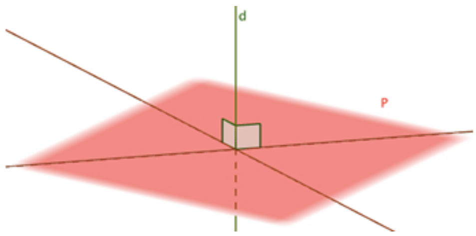


Propriété
Si deux droites sont parallèles, alors tout droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

9.3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.



Propriétés
- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

9.4 Géométrie vectorielle dans l'espace

9.4.1 Notion de vecteur dans l'espace

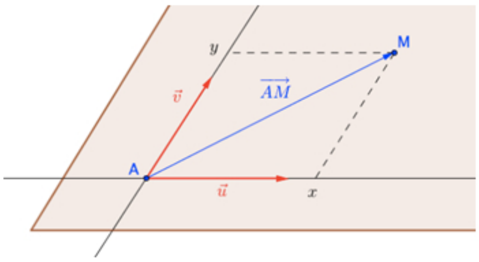
Définition
Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane ; relation de Chasles, colinéarité, etc . . . restent valides.

9.4.2 Caractérisation d'un plan

Définition

Soient A un point de l'espace, et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}= x\ \vec{u}\ +y\ \vec{v}$, avec x et y des réels, est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarques

– Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.
– Un plan est ainsi totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.
– Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont parallèles pour tous points A et B.

9.4.3 Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que des vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Propriétés

– Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\ \vec{u}\ +\beta\ \vec{v}\ +\gamma\ \vec{w}=\vec{0}$$

– Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité $\alpha\ \vec{u}\ +\beta\ \vec{v}\ +\gamma\ \vec{w}=\vec{0}$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Remarques

– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit en fait de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w}= a\ \vec{u}\ +b\ \vec{v}$ pour montrer la coplanarité des trois vecteurs.
– Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Théorème

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Propriété et définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u}= x\ \vec{i}\ +y\ \vec{j}\ +z\ \vec{k}$.
$(x; y; z)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

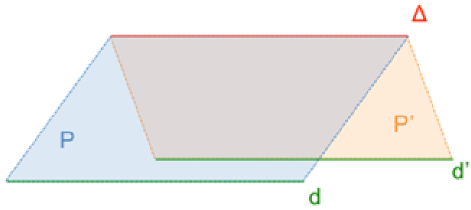
9.4.4 Application : démonstration du théorème du toit

Rappel du théorème

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :

- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors les droites d et d' sont également parallèles à la droite Δ.



Démonstration
d et d' sont parallèles : on note $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et de d', et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
On veut montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (et donc par suite, d et d' seront bien parallèles à Δ).

Notons $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P, et $(\vec{u}, \vec{v'})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P'. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont non coplanaires, puisque les plans P et P' sont sécants.

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que $\vec{w} = x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v}$.

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que $\vec{w} = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v'}$.

Ainsi, $x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v} = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v'}$.

Donc $(x_1 - x_2) \vec{u} = y_2 \vec{v'} - y_1 \vec{v}$.

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément $x_1 - x_2 = y_1 = y_2 = 0$.
Ainsi $\vec{w} = x_1 \vec{u}$, et donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, ce qui prouve que d et d' sont bien parallèles à Δ.

9.5 Repérage dans l'espace

9.5.1 Repères de l'espace

Définition
Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

x est l'abscisse du point M, y est l'ordonnée du point M et z est la cote.

On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $|| \vec{i} || = || \vec{j} || = || \vec{k} || = 1$.

9.5.2 Colinéarité et alignement dans l'espace

Théorèmes

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}\ (x; y; z)$ et $\vec{v}\ (x'; y'; z')$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & kx' \\ y & = & ky' \\ z & = & kz' \end{array}\right.$

• Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

• Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.

9.5.3 Milieu, distance

Théorèmes

• Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Dans un repère orthonormé :

• La norme du vecteur $\vec{u}$ est $||\,\vec{u}\,|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

• La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

9.6 Représentations paramétriques

9.6.1 Représentations paramétriques d'une droite

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}$ $(a; b; c)$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x &= at + x_A \\ y &= bt + y_A \\ z &= ct + z_A \end{cases}$$

Preuve

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ $(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\vec{u}$ $(a; b; c)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x - x_A &= at \\ y - y_A &= bt \\ z - z_A &= ct \end{cases}$$

Définition

$\begin{cases} x &= at + x_A \\ y &= bt + y_A \\ z &= ct + z_A \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est appelé **représentation paramétrique** de la droite Δ.

Remarques

– Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend du choix du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$.

– Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de la demi-droite d'origine A et de même sens que $\vec{u}$.

9.6.2 Représentations paramétriques d'un plan

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}\ (a; b; c)$ et $\vec{v}\ (a'; b'; c')$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & at + a't' + x_A \\ y & = & bt + b't' + y_A \\ z & = & ct + c't' + z_A \end{array}\right.$$

Définition

$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & at + a't' + x_A \\ y & = & bt + b't' + y_A \\ z & = & ct + c't' + z_A \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$, est appelé **représentation paramétrique** du plan P.

Remarque

Il existe plusieurs représentations paramétriques pour un même plan : chaque représentation dépend du choix du point A et des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Chapitre 10

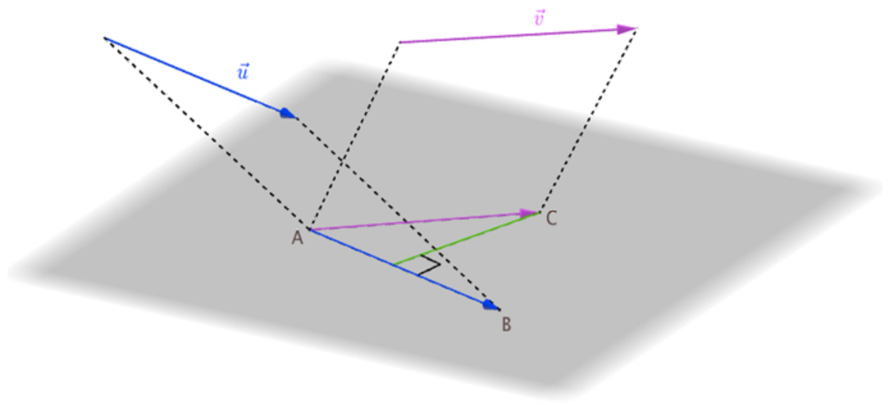
Produit scalaire dans l'espace

10.1 Produit scalaire de deux vecteurs

10.1.1 Définitions

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C.

Définition :
On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.



On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}+\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}\,||^2-||\,\vec{v}\,||^2\right)=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}\,||^2+||\,\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}-\vec{v}\,||^2\right)$
- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Définition avec l'angle :
$\vec{u}\cdot\vec{v}=||\,\vec{u}\,||\times||\,\vec{v}\,||\times\cos(\widehat{BAC})$

Définition avec le projeté orthogonal :
Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$, donc :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens différents.

10.1.2 Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\,\vec{u}\,||^2 = \vec{u}^2$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\,\vec{v})$$
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

10.1.3 Orthogonalité

Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad ||\,\vec{u}\,|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

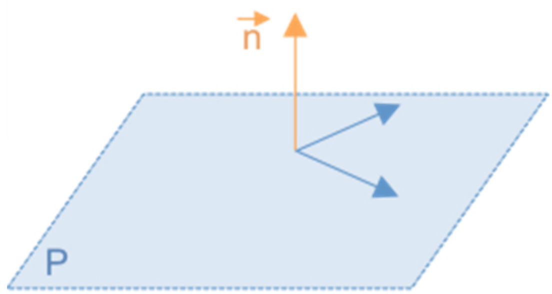
Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

10.2 Equations cartésiennes de l'espace

10.2.1 Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.



Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P, elle est en particulier orthogonale aux droites d_1 et d_2 contenues dans P.

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.

Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P. Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}$.

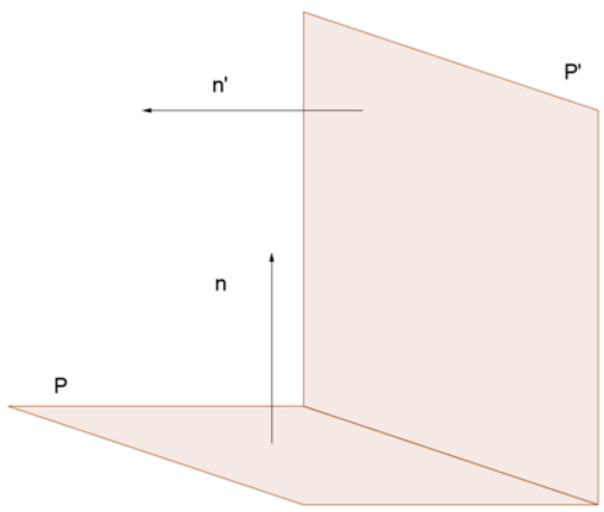
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}) = x\,\vec{u} \cdot \vec{v_1} + y\,\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, et donc la droite d est orthogonale à la droite Δ.

Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$.



10.2.2 Equations cartésiennes d'un plan

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$.

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

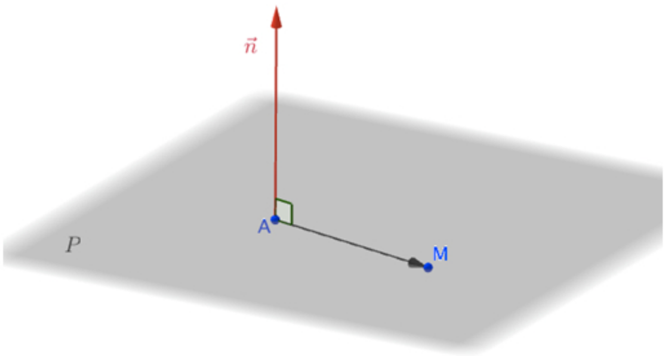
$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Réciproquement :



Supposons par exemple que $a \neq 0$ $(a, b$ et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}$ $(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ $(a; b; c)$.

Remarque
L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.
Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation $2x + 2y + 6z + 4 = 0$.

10.2.3 Equations cartésiennes d'une droite

Propriété Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

caractérise une droite et il est appelé système d'équations cartésiennes de cette droite.

Preuve
Si les vecteurs $\vec{n}$ $(a; b; c)$ et $\vec{n'}$ $(a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants selon une seule droite.

Chapitre 11

Statistiques

11.1 Echantillonnage

11.1.1 Intervalle de fluctuation asymptotique

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n}\in I_n\right)=1-\alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

u_α a été défini dans le chapitre sur les lois à densités par l'égalité $P(-u_\alpha\leq Y\leq u_\alpha)=1-\alpha$, où Y suit la loi normale centrée réduite.

Démonstration (exigible)

$$\frac{X_n}{n}\in I_n \Leftrightarrow p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leq\frac{X_n}{n}\leq p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$$\frac{X_n}{n}\in I_n \Leftrightarrow np-u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\leq X_n\leq np+u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$$

puis, en retranchant np :

$$\frac{X_n}{n}\in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\leq X_n-np\leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$$

enfin, en divisant par $\sqrt{np(1-p)}$, $(\neq 0)$:

$$\frac{X_n}{n}\in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha\leq\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq u_\alpha$$

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$; le théorème de Moivre-Laplace, (chapitre lois à densités), nous dit que, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Z_n \in [a;b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = P(a \leq Y \leq b)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

On définit la variable aléatoire F_n par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, $(n > 0)$; F_n représente la fréquence de succès.

Définition

L'intervalle $\left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil $1 - \alpha$. Cet intervalle, déterminé à partir de p et de n, contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1 - \alpha$ que n est grand.

Propriété

Au seuil de 95%, $\alpha = 0,05$ et $u_\alpha \simeq 1,96$. (Chapitre sur les lois à densités).
On obtient alors la propriété d'approximation suivante qui est valable dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$:

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de F_n, la fréquence d'un caractère dans un échantillon de taille n, est $\left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion de ce caractère dans la population.

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$ et $1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
On obtient alors $\left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ qui est l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde.

11.1.2 Prise de décision

L'intervalle de fluctuation asymptotique défini plus haut est utilisé, (lorsque les conditions de validité sont vérifiées, soit $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$), dans l'élaboration d'un test permettant de vérifier une hypothèse. On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse H que la proportion d'un caractère est p. On appelle I l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de ce caractère dans un échantillon aléatoire de taille n, au seuil de 95%, sous l'hypothèse H.
On observe alors la fréquence f du caractère dans un échantillon de taille n.

La règle de décision est :

•	si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse H.
•	si $f \notin I$, alors on rejette l'hypothèse H.

Remarques

• Au seuil de 95%, la probabilité que f, (obtenue dans un échantillon aléatoire), ne soit pas dans I est $\alpha = 0,05$. Cela signifie qu'il y a un risque de 5% de se tromper en rejetant l'hypothèse H alors qu'elle est vraie.

• Il est possible d'utiliser d'autres seuils, le plus courant après 95%, étant 99% ; il faut alors remplacer, dans l'intervalle de fluctuation, le nombre $u_{0,05} \simeq 1,96$ par le nombre $u_{0,01} \simeq 2,58$.

11.2 Estimation

On se propose ici d'estimer une proportion dans une population à partir de la fréquence observée sur un échantillon. C'est ce que l'on pratique par exemple lors d'un sondage.

11.2.1 Propriété

On suppose que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Pour tout réel $p \in]0;1[$, il existe un entier n_0 tel que : si $n \geq n_0$, alors $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$.

Démonstration

On reprend les notations de la démonstration page 1 ;

si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, d'après le théorème de Moivre-Laplace, on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Z_n \in [-2;2]\right) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P(-2 \leq Y \leq 2)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.

Or : $P(-2 \leq Y \leq 2) \simeq 0,954$

On obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,954$$

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

D'après la remarque page 2, puisque $2\sqrt{p(1-p)} \leq 1$, on a l'inclusion

$$\left[p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

En conclusion, on obtient donc : $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$

11.2.2 Propriété

Soit F_n la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion d'un caractère est p, associe la fréquence obtenue. Alors l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilté égale au moins à $0,95$.

Démonstration

Puisque $F_n = \frac{X_n}{n}$, il suffit d'appliquer le résultat précédent en remarquant que :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Longleftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

11.2.3 Définition

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p. Alors l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance $0,95$.

Cet intervalle est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure à $0,95$.

Chapitre 12

Algorithmique

12.1 Instruction conditionnelle, boucle et itérateur

12.1.1 Instruction conditionnelle

On utilise l'instruction "Si ... alors ... " , (If ... then ...),
ou bien l'instruction "Si ... alors ... Sinon" (If ... Then ... Else).

```
Si <condition> alors
    ... Instructions A ...
Sinon
    ... Instructions B ...
```

12.1.2 Boucles itératives

On utilise l'instruction "Pour" (For). Cette instruction s'emploie pour répéter n fois une suite d'instructions, lorsque n est connu à l'avance (par exemple pour déterminer un tableau de n valeurs d'une fonction, pour le calcul de n termes d'une suite)

```
Entier i
Pour i = 1 à 100
    Début
    ... Instructions ...
    Fin
```

12.1.3 Boucles itératives conditionnelle

On utilise l'instruction "Tant que" (While). Cette instruction s'emploie pour répéter une suite d'instructions lorsque le nombre de répétitions est inconnu. La suite d'instructions est répétée tant qu'une certaine condition est vraie.

```
Variable X
X= ...
Début Tant que <condition sur X>
    ... Instructions ...
Fin Tant que
```

Attention à toujours vérifier que la boucle ne va pas se répéter sans fin.

Exemple de programme avec une calculatrice :

Programme Casio

```
1 → A
2 → B
While B − A = 1
10 × A → A
A + 1 → B
WhileEnd
A ◢
```

Programme Texas

```
1 → A
2 → B
While B − A = 1
10 × A → A
A + 1 → B
End
Disp A
```

le programme qui suit va bien se terminer car dans une calculatrice, la taille des nombres est limitée et donc il existe un grand nombre K, par exemple $K = 10^{14}$, tel que 1 soit négligable par rapport à K et alors $K + 1$ est égal à K (pour la calculatrice !), donc le programme s'arrête.

12.2 Algorithmique et suites

12.2.1 Calcul des termes d'une suite

Approximation d'un réel

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$. On démontre que cette suite est décroissante et minorée, donc convergente. Ecrire un algorithme qui permet de calculer les termes de u_1 jusqu'à u_{20}. Ecrire le programme sur une calculatrice et émettre une conjecture sur la limite de cette suite.

12.2.2 Rang à partir duquel un terme est supérieur à un réel donné

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables et Initialisation
   u prend la valeur 2000
   n prend la valeur 0
Traitement
   Tant que u < 2500
      Remplacer u par u * 1,025
      Augmenter n de 1
      Fin du Tant Que
Sortie
   Afficher u et n
```

1. Ecrire la suite des cinq premiers affichages.
2. Déterminer les valeurs finales de u et de n.
3. Donner un problème dont la solution est donnée par cet algorithme.

12.2.3 Limite d'une suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$. On peut démontrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente de limite $\frac{1}{2}$. Expliquer ce que fait l'algorithme suivant et écrire le programme sur une calculatrice.

```
Variables et Initialisation
   u prend la valeur 0,75
   n prend la valeur 1
Traitement
   Tant que u - 0,5 > 0,0001
      Remplacer u par 0,5*u+0.25
      Augmenter n de 1
      Fin du Tant Que
Sortie
   Afficher u et n
```

12.3 Algorithmique et probabilités

Simulation d'une marche aléatoire.

Une fourmi effectue, successivement et de manière aléatoire, des déplacements de un centimètre, soit vers le sud, soit vers le nord. Pour chaque déplacement, elle continue dans la même direction que le précédent avec la probabilité $\frac{3}{4}$ ou fait demi-tour. Le premier déplacement se fait vers le sud avec la probabilité $\frac{3}{4}$. Nous allons simuler cette marche aléatoire.

Analyser l'algorithme suivant puis écrire le programme avec Algobox ou une calculatrice :

```
Variables
   x l'abscisse du point.
   d le déplacement à chaque étape
   r un entier aléatoire entre 1 et 4
   k un entier
Initialisation
   x = 0
   d = - 1
Traitement
   Pour k variant de 1 a 100
      r prend une valeur aléatoire 1, 2, 3 ou 4.
      Si r = 4 alors
         d = -d
      x = x + d
Sortie
   Afficher x
```

12.4 Algorithmique et fonctions

1. Recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$.
   L'analyse mathématique, faite au préalable, permet grâce au théorème des valeurs intermédiaires d'affirmer :
   si f est continue croissante sur $[a; b]$ et si $k \in [f(a); f(b)]$,
   ou si f est continue décroissante sur $[a; b]$ et si $k \in [f(b); f(a)]$,
   alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique α dans $[a; b]$.

   Méthode par dichotomie

Cette méthode permet à chaque étape de diviser l'amplitude de l'intervalle contenant la solution par deux. Donc en dix étapes, on gagne environ trois décimales puisque $2^{10} \simeq 1000$. Cela donne par exemple l'algorithme suivant :

```
Variables
   m , valeur milieu de l'intervalle "courant"
Initialisation
   a et b, les bornes de l'intervalle [a ; b], e la précision
   f, la fonction (rappel : f change de signe entre a et b)
Traitement
   Tant que b - a > e
      m prend la valeur (a+b)/2
      Si f(m) et f (a) sont de même signe alors
         a prend la valeur m
      sinon
         b prend la valeur m
Sortie
     a et b
```

Voici un jeu utilisant une méthode semblable :

On demande au joueur de deviner en six essais au maximum un nombre tiré au hasard entre 1 et 100. On lui indique à chaque fois si le nombre qu'il propose est supérieur ou inférieur au nombre cherché. Sans stratégie, il peut être long pour parvenir à touver ce nombre.

```
Variables
   k nombre proposé par le joueur
   N un nombre à trouver entier au hasard entre 1 et 100
   essai prend la valeur 1
Traitement
   Tant que essai est inférieur ou égal à 6
      Saisir k
      Si k est supérieur à N alors
         Affiche "c'est moins"
      Si k est inférieur à N
         Affiche "c'est plus"
      Si k=N alors
         Affiche "c'est gagné"
         fin de programme
      essai prend la valeur essai+1
Sortie
   Affiche "c'est perdu."
```

Pour la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$, on pourrait aussi utiliser une méthode par "balayage" ou une méthode par "calcul de valeurs aléatoires". Mais ces méthodes sont en général plus longues et sont plutôt utilisées pour la recherche d'extremum.

2. Recherche d'extremum

   Algorithme 1 : déterministe à pas constant

```
Variables
   a, b les bornes de l'intervalle d'étude
   f , la fonction à étudier
   N, le nombre d'intervalles
   x, la valeur "courante"
   y, la valeur correspondante de f(x)
Initialisation
   min prend la valeur f (a)
   max prend la valeur f (a)
   pas prend la valeur (b-a)/N
   x prend la valeur a
Traitement
```

```
      Pour k de 1 à N
         x prend la valeur x+pas
         y prend la valeur f(x)
         Si y>max alors
            max prend la valeur y
         Si y<min alors
            min prend la valeur y
   Sortie
      Affiche min et max.
```

Algorithme 2 : tabulation « aléatoire » d'une fonction

```
   Variables
      a, b les bornes de l'intervalle
      f la fonction à étudier
      N le nombre d'images à calculer.
   Initialisation
      min prend la valeur f (a)
      max prend la valeur f (a)
   Traitement
      Pour k variant de 1 a N
         x prend une valeur aléatoire entre a et b.
         Si f (x) > max alors
            max prend la valeur f (x)
         Si f (x) < min alors
            min prend la valeur f (x)
   Sortie
      Afficher min et max
```

3. Test de la monotonie

   Attention, l'algorithme peut montrer que la fonction n'est pas monotone ou que la fonction peut être monotone mais dans ce cas il se peut qu'elle ait des variations de sens contraire sur certains intervalles très courts.

   Algorithme :

```
   Variables
      a, b les bornes de l'intervalle d'étude [a ; b]
      f, la fonction à étudier
      N, le nombre d'intervalles
      x, les valeurs successives de la variable
   Traitement
   Initialisation
      pas prend la valeur (b-a)/N
      sens prend la valeur signe de la différence f (b) - f (a)
      x prend la valeur a
      Pour k variant de 1 à N
         Si ( f (x+pas)-f(x) n'est pas de même signe que sens ) alors
            Affiche "la fonction n'est pas monotone"
            Affiche x et x+pas
            Fin du programme
         x prend la valeur x+pas
      Affiche "La fonction semble monotone."
   Sortie
      Les affichages du traitement
```

12.5 Algorithmique et intégrales

Calcul approché d'aires

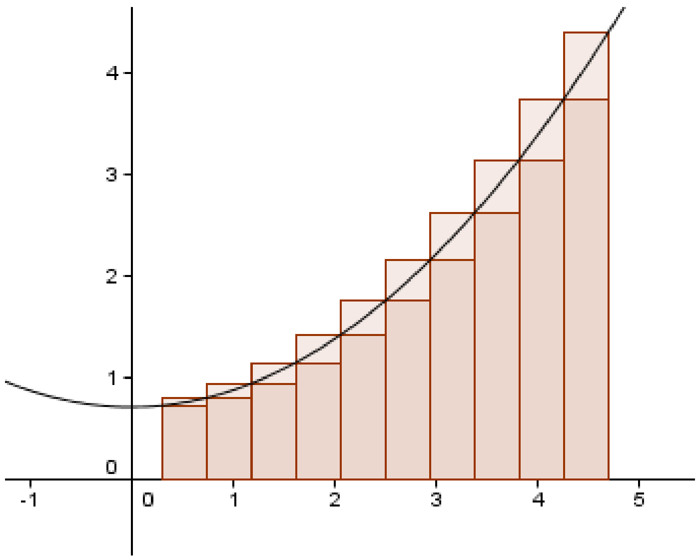
12.5.1 Encadrement d'une intégrale pour une fonction monotone positive

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a;b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a;b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

$$f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$$

Donc $hf(a+ih) \leq \displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\mathrm{d}x \leq hf(a+(i+1)h)$, où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.



On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)h)$$

Algorithme

```
VARIABLES
   a, b, n, h DU TYPE NOMBRE
   Iinf, Isup DU TYPE NOMBRE
   x DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
   Saisir a, b, n
   h PREND LA VALEUR (b-a)/n
   Iinf PREND LA VALEUR 0
   Isup PREND LA VALEUR 0
   x PREND LA VALEUR a
   POUR i variant de 0 à n-1
      Iinf PREND LA VALEUR Iinf+f(x)
      x PREND LA VALEUR x+h
      Isup PREND LA VALEUR Isup+f(x)
   FIN POUR
   Iinf PREND LA VALEUR h*Iinf
   Isup PREND LA VALEUR h*Isup
   AFFICHER Iinf, Isup
FIN ALGORITHME
```

12.5.2 Cas d'une fonction continue

Si la fonction f est simplement continue sur $[a;b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant, sur chaque intervalle $[a+ih;a+(i+1)h]$, $f(x)$ par $f(a+(i+1/2)h)$.