Devoir Maison de Mathématiques 1
Etude du sens de variation d'une suite

1 Méthodes

Soit (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, , $u_{n+1} \leq u_n$.
- Si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} = u_n$, on dit que la suite (u_n) est constante à partir du rang n_0.

En Première S, on a donné trois méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite.

1.1 Méthode 1 : étude de la différence $u_{n+1} - u_n$.

- Si, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
- Si, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

1.2 Méthode 2 : étude du sens de variation d'une fonction.

Soit f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
- Si la fonction f est croissante sur $[n_0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
- Si la fonction f est décroissante sur $[n_0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

1.3 Méthode 3 : comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 quand les termes sont strictement positifs.

On suppose que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
- Si, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
- Si, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

En terminale, on peut utiliser un nouvel outil : le **raisonnement par récurrence**.

2 Applications

Etudier le sens de variation des suites suivantes :
1. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 2n + 9$.
2. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + 3n - 5$.
3. (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{5}{3^n}$.
4. (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_0 = 3$ et $t_{n+1} = 2t_n - 7$.
   On pourra démontrer par récurrence que la propriété " $t_{n+1} < t_n$ ", notée P_n, est vraie pour tout n.