Terminale S
Suites numériques

V. B. J. D. S. B.

Lycée des EK

1er juillet 2021

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: ....

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $1 + 2 = 3$ et $\frac{2(2+1)}{2} = 3$
- Pour $n = 3$: ....

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $\quad 1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$
- Pour $n = 3$: $\quad 1 + 2 + 3 = 6$ et $\dfrac{3(3+1)}{2} = 6$

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Idée : le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré).

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Idée : le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré).

Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier n ou pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Montrons que $\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
On note cette proposition P_n.

Exemple

Montrons que $\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On note cette proposition P_n.

- Initialisation : ....
  ....
  ....

Exemple

Montrons que $\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On note cette proposition P_n.

- Initialisation : Montrons que P_n est vraie au rang 1, c'est-à-dire que P_1 est vraie :
  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$; c'est vérifié.

- Hérédité : ....

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
  Or $1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$
  $(k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. cqfd

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
  Or $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
  $(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. cqfd
- Conclusion : ....
  ....

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
  Or $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
  $(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. cqfd
- Conclusion : La propriété P_n est vraie pour tout $n\geq 1$, c'est-à-dire : $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Comportement d'une suite numérique

Par "étudier le comportement de la suite (u_n)", on sous-entend étudier les propriétés du nombre u_n lorsque l'entier n devient de plus en plus grand (variations, encadrement, comportement à l'infini . . .).

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si ....

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si ....

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- bornée si ....

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- bornée si pour tout $n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemples

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$.

  ....

  ....

  ....

  ....

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.
  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.
  Elle est aussi majorée par 1 et par tout réel $x \geq 1$.

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.
  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.
  Elle est aussi majorée par 1 et par tout réel $x \geq 1$.

- Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$.

  ....

  ....

  ....

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \dots\}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.
  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.
  Elle est aussi majorée par 1 et par tout réel $x \geq 1$.

- Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \dots\}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 0$.
  Cette suite est aussi minorée par 0 et par tout réel négatif ; en plus ici, 0 est le minimum de la suite atteint au rang 0.
  Cette suite n'est pas majorée.

Définitions

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient ....
....

Définitions

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

Définitions

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\ldots\ldots\ldots$$

Définitions

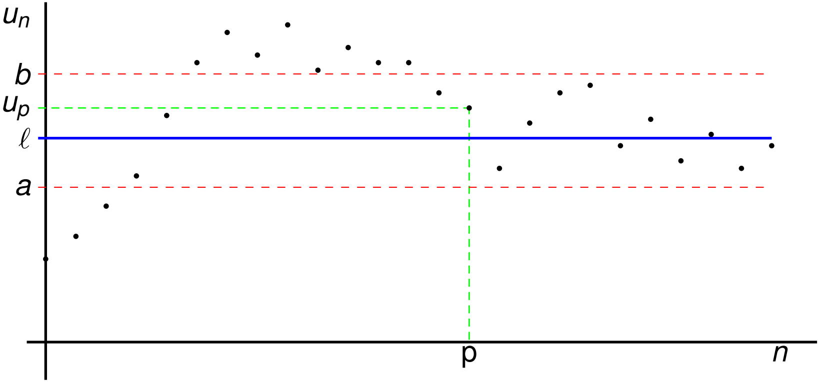
La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$$

.

Interprétation graphique



Définitions

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) contient

....

Définitions

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

Définitions

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définitions

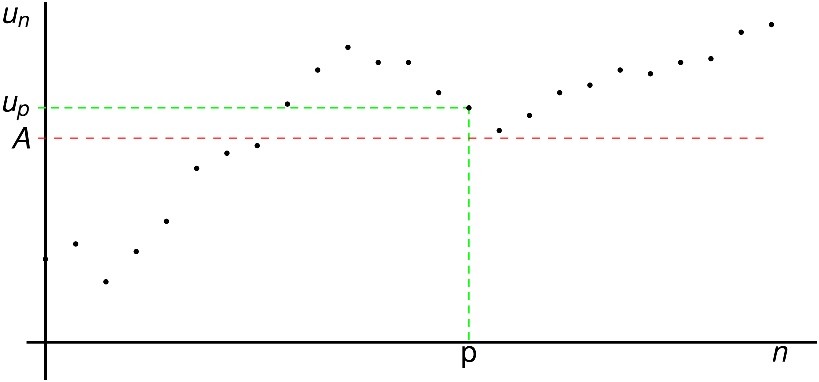
Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad (\text{resp.} - \infty)$$

.

Interprétation graphique



Théorèmes

$$\lim_{n \to +\infty} n = \ldots$$

Théorèmes

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = \ldots$$

Théorèmes

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \ \ldots$$

Théorèmes

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \dots$$

Théorèmes

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \dots$$

Théorèmes

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \ldots$$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim_{n\to+\infty} n^k = \ldots$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ $\quad \displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = \dots$

Théorèmes

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Preuve de $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: ......

Preuve de $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Preuve de $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Preuve de $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Si $A > 0$, pour tout entier $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$, car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Soit N le plus petit entier tel que $N > \sqrt{A}$; alors $\forall n \geq N$ on a $n^2 > A$.

Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Si $A > 0$, pour tout entier $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$, car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Soit N le plus petit entier tel que $N > \sqrt{A}$; alors $\forall n \geq N$ on a $n^2 > A$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$						

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$					

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$				

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$			

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.

F. I. = forme indéterminée ; on ne connait pas à priori la réponse.

Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0

Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$			

Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$		

Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ avec R. S.	

Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ avec R. S.	F. I.

R. S. = règle des signes.

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$						

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$					

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0				

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.			

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ (R. S.)		

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ (R. S.)	$\pm\infty$ (R. S.)	

Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ (R. S.)	$\pm\infty$ (R. S.)	F. I.

La règle des signes s'applique si v_n est de signe constant sinon il n'y a pas de limite.

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$$

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$$

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$$

Donc par quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3n+5} = 0$$

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note ....

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Le principe est toujours le même pour "lever" une indétermination : il faut changer l'écriture de la suite.

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-n-5) = -\infty$,

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-n-5) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 - n - 5 =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-n-5) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 - n - 5 =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (-n - 5) = -\infty$,

donc $\lim_{n \to +\infty} 3n^2 - n - 5 =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-n-5) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 - n - 5 =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}) = 3$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-n-5) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 - n - 5 =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}) = 3$

Donc par produit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim_{n \to +\infty}(3n+5) = +\infty$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}, \quad (n \neq 0)$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \frac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \frac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}$, $(n \neq 0)$

$\lim_{n\to+\infty}(3+\frac{5}{n}) = 3$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}$, $(n \neq 0)$

$\lim_{n\to+\infty}(3+\frac{5}{n}) = 3$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2+\frac{7}{n}) = -2$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}, \quad (n \neq 0)$

$\lim_{n\to+\infty}(3+\frac{5}{n}) = 3$ et $\lim_{n\to+\infty}(-2+\frac{7}{n}) = -2$

Donc par quotient $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{2}$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$,

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$,

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$,

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

Donc par produit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Théorèmes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors ....

Théorèmes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Théorèmes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Majoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors ....

Théorèmes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Majoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A; +\infty[$.

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A;+\infty[$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A; +\infty[$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

La démonstration est analogue pour le théorème de majoration.

Théorème "des gendarmes" (admis)

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ.
On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) ....

Théorème "des gendarmes" (admis)

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ.
On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge également vers ℓ

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est . . . .

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ.

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ.
c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, ...

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ.
c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.

Théorèmes

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle . . . .

Théorèmes

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Théorèmes

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle
....

Théorèmes

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.

Théorèmes

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.

Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant, ou un minorant, de la suite.

Corollaire :
une suite croissante non majorée . . . .

Corollaire :

une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Corollaire :
une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : . . . .

Corollaire :
une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.

Corollaire :
une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.

Corollaire :
une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$
d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Corollaire :
une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$
d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) ....

....

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) ....

....

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Théorème

Soit q un réel.

Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) ....

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) :

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation :

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1 + ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1+ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1+ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.
On en déduit que $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$ car $1+a > 0$.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1 + ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.
On en déduit que $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$ car $1 + a > 0$.
Ainsi : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$ car $ka^2 > 0$, et P_{k+1} est vraie.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+na) = +\infty$, car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.