Terminale S
Suites numériques

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Introduction

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

pour $n = 2$: $\qquad 1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$

pour $n = 3$: $\qquad 1 + 2 + 3 = 6$ et $\dfrac{3(3+1)}{2} = 6$

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Idée : Le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré). Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.

1.2 Principe de récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

— Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.

— Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.

— Conclusion : P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

1.3 Exemple

Montrons que $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : montrons que P_n est vraie au rang 1, c'est-à-dire que P_1 est vraie :
$\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$; c'est vérifié.

Hérédité : supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que : $1 + 2 + \ldots + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Or $1 + 2 + \ldots + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\dfrac{k}{2} + 1\right) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. $\qquad$ cqfd

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 Comportement d'une suite numérique

Par "étudier le comportement de la suite (u_n)", on sous-entend étudier les propriétés du nombre u_n lorsque l'entier n devient de plus en plus grand (variations, encadrement, comportement à l'infini ...).

2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

— majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

— minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

— bornée si pour tout $n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemples

— Soit la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$. Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique. Elle est aussi majorée par 1 et par tout réel $x \geq 1$.

— Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$. Cette suite est minorée par 0 et par tout réel négatif; en plus ici, 0 est le minimum de la suite, atteint au rang 0. Cette suite n'est pas majorée.

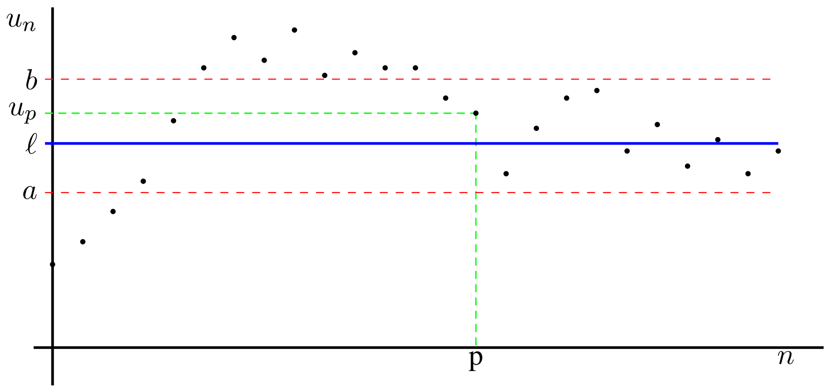
2.2 Limite finie d'une suite

Définitions

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$

Interprétation graphique :



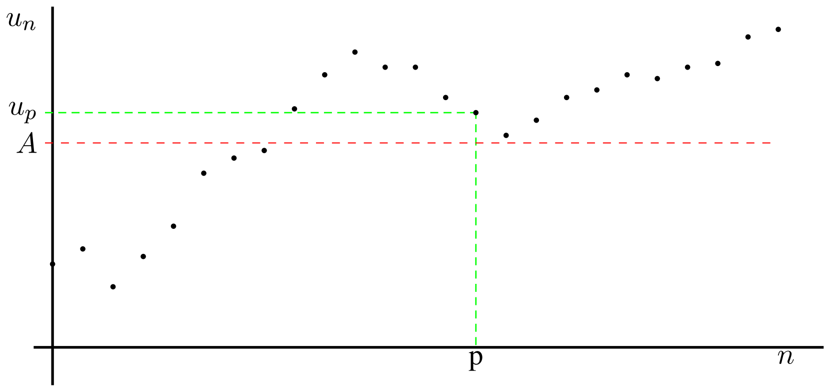
2.3 Limite infinie d'une suite

Définitions

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors : $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad (\text{resp.} -\infty)$

Interprétation graphique :



2.4 Limites des suites usuelles

Théorèmes

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Preuve de $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Si $A > 0$, pour tout entier $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$, car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Soit N le plus petit entier tel que $N > \sqrt{A}$; alors $\forall n \geq N$ on a $n^2 > A$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

3 Opérations sur les limites

3.1 Somme de deux suites

Somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.

F. I. = forme indéterminée ; on ne connaît pas à priori la réponse.

3.2 Produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ R. S.	F. I.

R. S. = règle des signes.

3.3 Quotient de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ R. S.	$\pm\infty$ R. S.	F. I.

La règle des signes s'applique si v_n est de signe constant sinon il n'y a pas de limite.

3.4 Exemple

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+5) = +\infty$

Donc par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n+5} = 0.$

3.5 Formes indéterminées

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Le principe est toujours le même pour "lever" une indétermination : il faut changer l'écriture de la suite.

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n-5) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 - n - 5 =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2}) = 3$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n+7) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \frac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \frac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}, \quad (n \neq 0),$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (3 + \dfrac{5}{n}) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2 + \dfrac{7}{n}) = -2$, donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}$.

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ F. I. ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}) = 1$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4 Limites et comparaison

4.1 Comparaison

Théorèmes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

— Minoration : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

— Majoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :
On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.
Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A; +\infty[$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

La démonstration est analogue pour le théorème de majoration.

Théorème "des gendarmes" (admis)
On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ. On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge également vers ℓ.

4.2 Cas des suites monotones et convergentes

Théorème
Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ. Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.

5 Convergence de certaines suites

5.1 Convergence des suites monotones

Théorème
Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.
Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.

Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant, ou un minorant, de la suite.

Corollaire : une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$, d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5.2 Limite d'une suite géométrique

Théorème
Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
— Initialisation : pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

— Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1+ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1+ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.
On en déduit que $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$ car $1+a>0$.
Ainsi : $(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$ car $ka^2>0$, et P_{k+1} est vraie.

— Conclusion : Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

On pose maintenant $q = 1+a$ avec $a>0$, donc $q>1$.
Alors $q^n \geq 1+na$, d'après la propriété P_n.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$, car $a>0$.
Donc d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.