Cours de terminale S
Produit scalaire dans l'espace

V. B. et S. B.

Lycée des EK

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.

Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C.

Définition

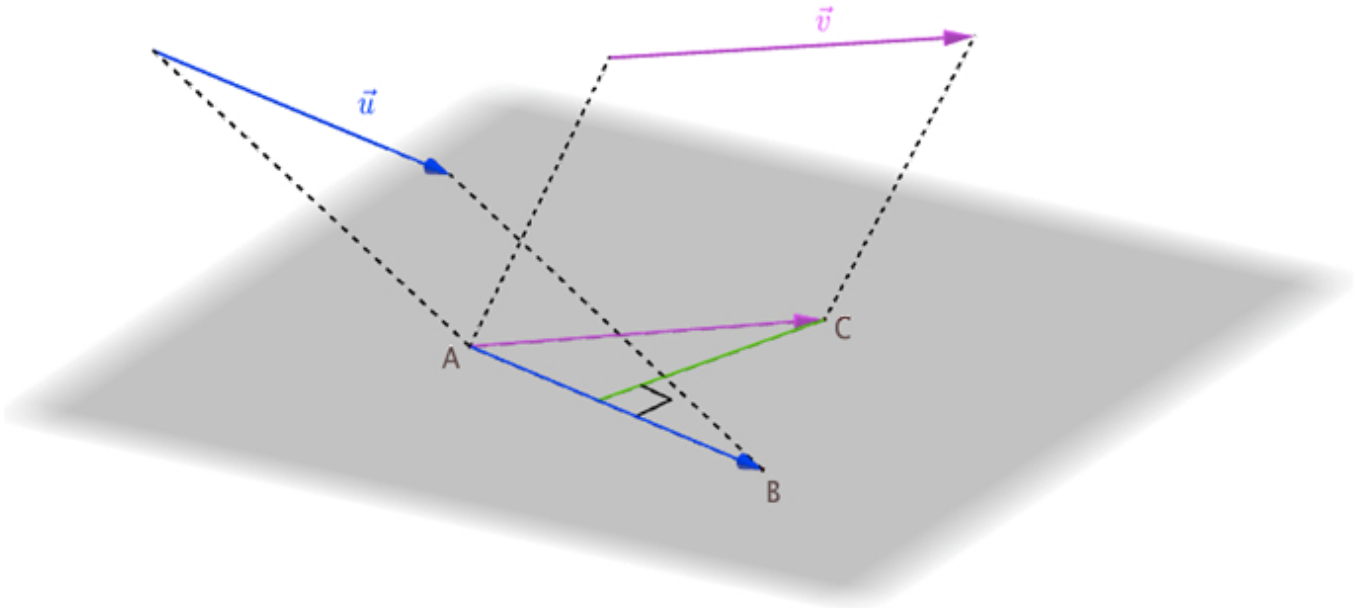
On appelle produit scalaire de l'espace de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté .....
.....

Définition

On appelle produit scalaire de l'espace de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan P.

Définition

On appelle produit scalaire de l'espace de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan P.



On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} =$.....

On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right)$

On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right)$

. . . . . .

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2\right)$$

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2\right)$$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors .....

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2\right)$$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2\right)$$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition avec l'angle :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition avec l'angle :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\widehat{BAC})$$

Définition avec l'angle :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{BAC})$$

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc :

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens,

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens différents.

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens différents.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2 = \overrightarrow{u}^2$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2 = \overrightarrow{u}^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \ldots\ldots$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = || \overrightarrow{u} ||^2 = \overrightarrow{u}^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2 = \overrightarrow{u}^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2 = \overrightarrow{u}^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2 = \overrightarrow{u}^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

$$(k\,\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2 = \overrightarrow{u}^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

$$(k\,\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (k\,\overrightarrow{v})$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2 = \overrightarrow{u}^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

$$(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$$

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si .....

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

. . . . . .

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

Le vecteur nul est .....

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Définition

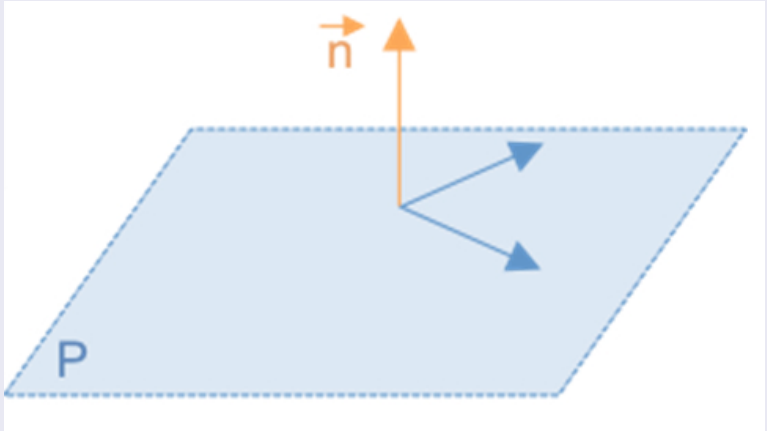
Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est .....
.....

Définition

Un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.

Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.



Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si .....
.....

Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P, ...

.....

Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P, elle est en particulier orthogonale aux droites d_1 et d_2 contenues dans P.

Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P, elle est en particulier orthogonale aux droites d_1 et d_2 contenues dans P.

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors .....
.....

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc .....
.....
.....

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P. Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}$.

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P. Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\ \overrightarrow{v_1} + y\ \overrightarrow{v_2}$.
On a alors : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} =$.....

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P. Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}$.
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}) = x\,\vec{u} \cdot \vec{v_1} + y\,\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P. Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}$.
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}) = x\,\vec{u} \cdot \vec{v_1} + y\,\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ .....
.....

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P. Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}$.
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}) = x\,\vec{u} \cdot \vec{v_1} + y\,\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, et donc la droite d est orthogonale à la droite Δ.

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P. Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}$.
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}) = x\,\vec{u} \cdot \vec{v_1} + y\,\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, et donc la droite d est orthogonale à la droite Δ.

Propriété

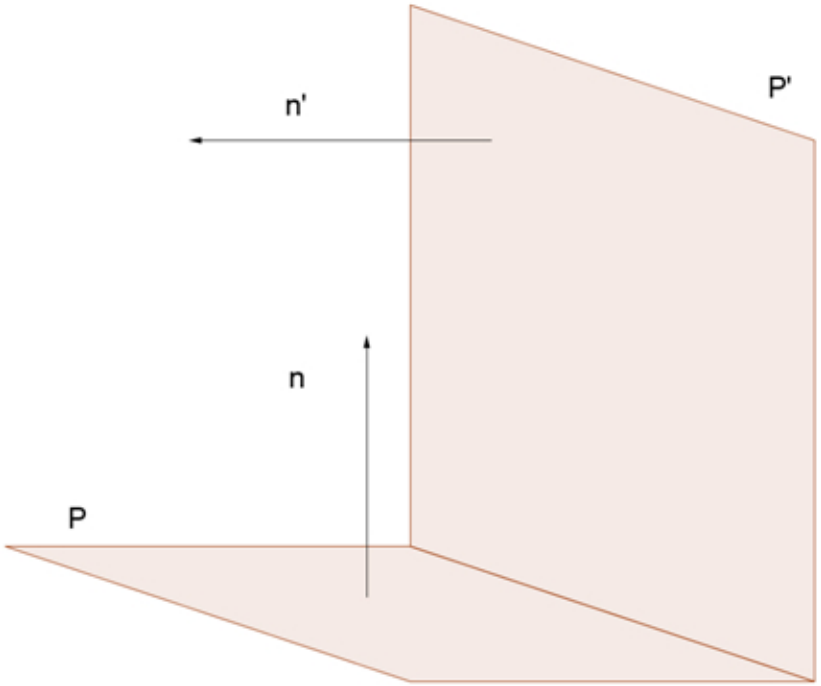
P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que .....

Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$.

Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$. Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$.



Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}$ $(a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme .....
.....

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}$ $(a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que .....
.....

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$.

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.
$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$.....

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow$.....

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

$\Leftrightarrow$.....

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Preuve (exigible)

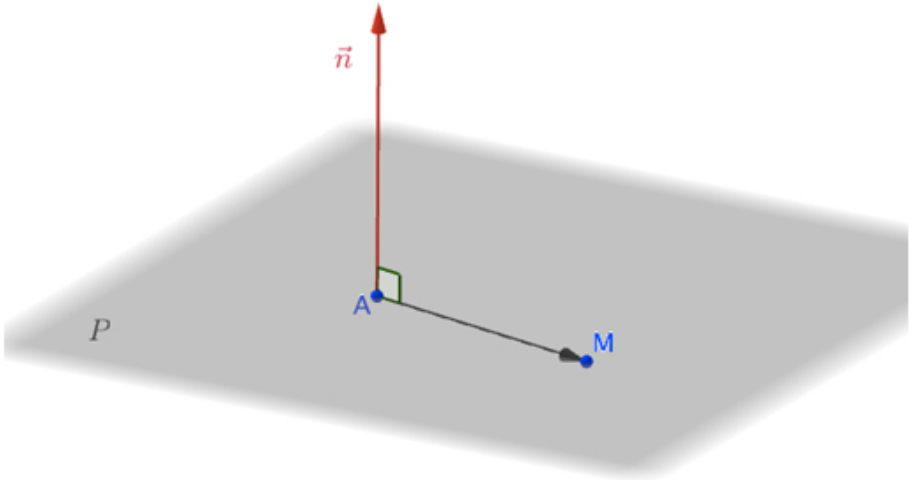
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.



Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point .....
.....

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}$ $(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$=.....

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}$ $(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}$ $(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
.....

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}$ $(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}$ $(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Donc l'ensemble E est .....
.....

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}\ (a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$.

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}\ (a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$.

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.
Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation .....

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.
Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation $2x + 2y + 6z + 4 = 0$.

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.
Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation $2x + 2y + 6z + 4 = 0$.

Propriété

Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

caractérise .....

.....

Propriété

Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

caractérise une droite et il est appelé système d'équations cartésiennes de cette droite.

Propriété

Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

caractérise une droite et il est appelé système d'équations cartésiennes de cette droite.

Preuve

Si les vecteurs $\overrightarrow{n}\ (a; b; c)$ et $\overrightarrow{n'}\ (a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont .....
.....

Preuve

Si les vecteurs $\overrightarrow{n}\ (a; b; c)$ et $\overrightarrow{n'}\ (a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants selon une seule droite.

Preuve

Si les vecteurs $\overrightarrow{n}\ (a; b; c)$ et $\overrightarrow{n'}\ (a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants selon une seule droite.