

Terminale S (2016-2017)
Produit scalaire dans l'espace

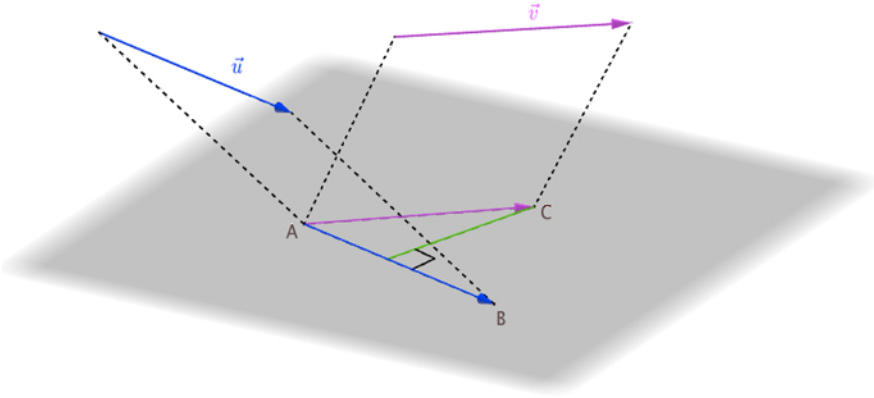
1 Produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Définitions

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C .

Définition :

On appelle produit scalaire de l'espace de \vec{u} et \vec{v} , noté



On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors

Définition avec l'angle :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots\dots\dots$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots\dots\dots$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots\dots\dots$

1.2 Propriétés

Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \dots\dots\dots$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \dots\dots\dots$

$$(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \dots\dots\dots$$

1.3 Orthogonalité

Propriétés

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de l'espace.

- \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$$

Remarque

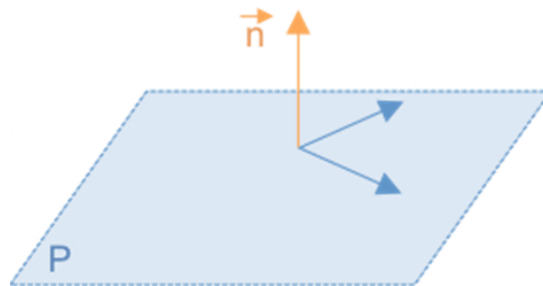
Le vecteur nul est

2 Equations cartésiennes de l'espace

2.1 Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur normal \vec{n} à un plan P est



Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si

Preuve (exigible)

\Rightarrow : si d est orthogonale à toute droite du plan P ,

\Leftarrow : réciproquement on note \vec{u} , \vec{v}_1 et \vec{v}_2 des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur \vec{w} .

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes,

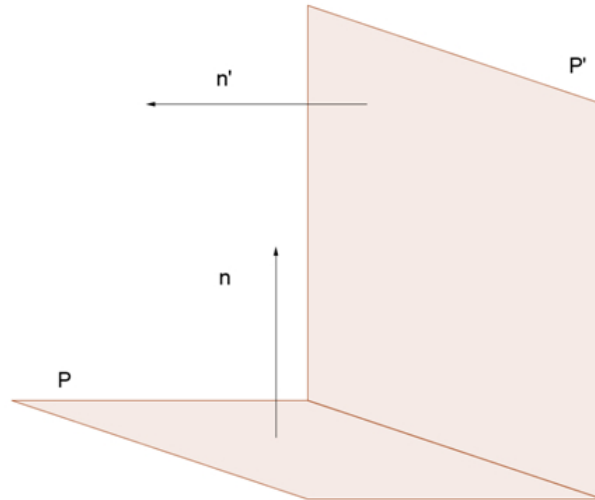
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \dots\dots\dots$

Donc les vecteurs \vec{u} et \vec{w}

Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs \vec{n} et \vec{n}' .

Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que



2.2 Equations cartésiennes d'un plan

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme

.....

Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

.....

Preuve (exigible)

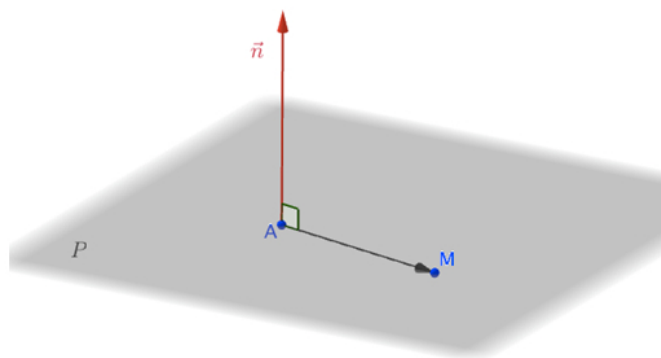
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow \dots$



Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).

On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point

.....

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = \dots\dots\dots$

E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

Donc l'ensemble E est

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation

2.3 Equations cartésiennes d'une droite

Propriété Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

caractérise

Preuve

Si les vecteurs $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont