Cours de terminale S
Probabilités
Conditionnement et indépendance

V. B. J. D. S. B.

Lycée des EK

28 août 2019

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit P une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \ldots\ldots\ldots$$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit P une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \ldots\ldots\ldots$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \ldots\ldots\ldots$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \dfrac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \dfrac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
- Pour tout événements B et C incompatibles, $(B \cap C = \emptyset)$, on a : $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

Propriétés

Propriétés

- $P_A(A) = \ldots\ldots\ldots$

Propriétés

- $P_A(A) = 1$

Propriétés

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors ....

Propriétés

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$

Propriétés

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$
- $P_A(\overline{B}) = \ldots\ldots\ldots$

Propriétés

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Démonstration

Démonstration

- $P_A(A) = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$
  car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$
  car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$
- $P_A(\overline{B}) = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$
  car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$
- $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$
  car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$
- $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$
  car $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Démonstration

- $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$
  car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$
- $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$
  car $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
  donc $P_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - P_A(B)$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc} \ldots\ldots\ldots$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

de même :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : . . . .

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

de même :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

de même :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = \dots\dots\dots$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

de même :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

de même :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

remarque : si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = \ldots\ldots\ldots$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

de même :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

remarque : si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = 0$.

Représentation par un arbre pondéré

Exemple : tous les élèves de Terminale d'un lycée ont passé un test de certification en Anglais. 80% ont réussi le test.
Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé.
Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les évènements T : « L'élève a réussi le test » et D : « L'élève a déjà redoublé ».

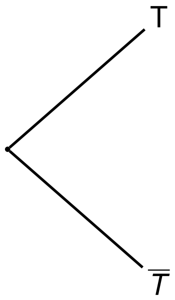
On peut représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré, en respectant certaines règles.

Représentation par un arbre pondéré

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

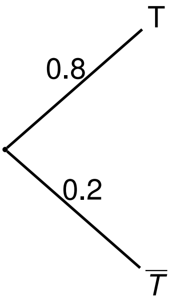
Représentation par un arbre pondéré

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.



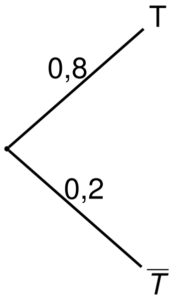
Représentation par un arbre pondéré

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

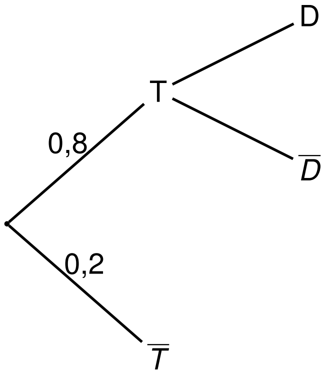


Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

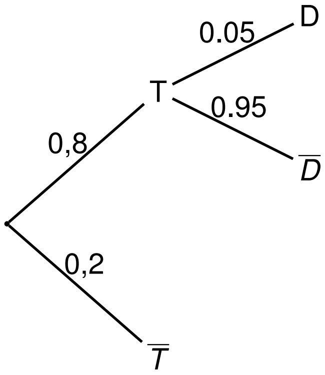
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



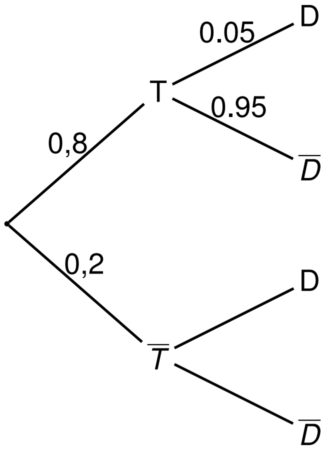
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



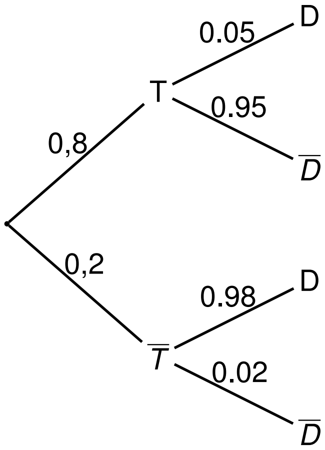
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à . . .

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de ....

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = \ldots\ldots\ldots$

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,95$

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = \ 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = \ 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.

Par exemple, ici :
$P(D) =$.........

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = \ 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.

Par exemple, ici :
$P(D) = P(D \cap T) + P(D \cap \overline{T}) = 0,05 \times 0,8 + 0,98 \times 0,2 = 0,236$

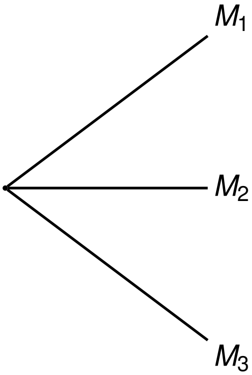
Exemple

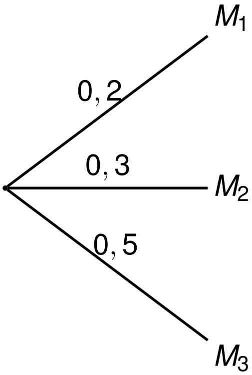
Trois machines M_1, M_2, et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production d'une entreprise. On estime à $1,5\%$, 2% et 1% les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3. On choisit une pièce au hasard dans la production.

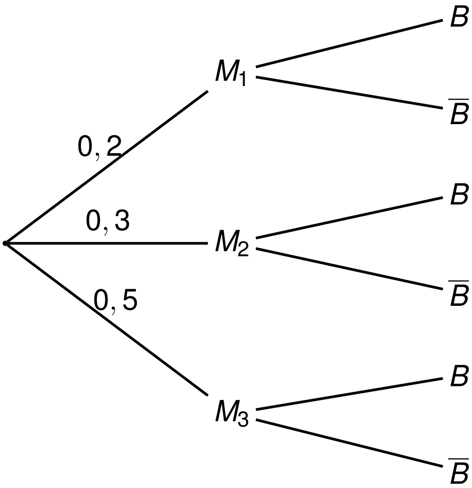
L'objectif est de calculer la probabilité de l'évènement B : « La pièce est bonne ».

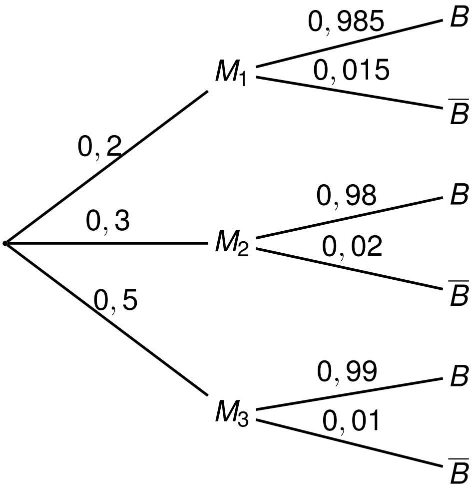
Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'évènement : « La pièce est produite par M_i ».

On peut illustrer la situation par un arbre pondéré :


M_1
M_2
M_3


M_1
0, 2
0, 3
M_2
0, 5
M_3


0, 2
0, 3
0, 5
M_1
M_2
M_3
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$


0, 2
0, 3
0, 5
M_1
M_2
M_3
0, 985
0, 015
0, 98
0, 02
0, 99
0, 01
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins

$\dots\dots\dots$

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :
$P(B) = \ldots\ldots\ldots$

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :
$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :
$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$

On peut détailler les calculs dans le tableau suivant :

	B	$\overline{B}$	
M_1			

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2			

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3			

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3	$0,5 \times 0,99$	$0,5 \times 0,01$	$P(M_3) = 0,5$

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3	$0,5 \times 0,99$	$0,5 \times 0,01$	$P(M_3) = 0,5$
	$P(B) = 0,986$	$P(\overline{B}) = 0,014$	1

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

$$= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles.

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Alors $P(A) = \ldots\ldots\ldots$

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Alors $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$,

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Alors $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc ....

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Alors $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc A est indépendant de B.

Evénements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Alors $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc A est indépendant de B.

D'où la définition :

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = \ldots\ldots\ldots$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = \dots$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = \dots$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Noter que si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \ldots$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Noter que si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie ......

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = \ldots$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

"A et B indépendants" signifie . . . . . .

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

"A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

"A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B)$......

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

"A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

"A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Si A et B sont incompatibles alors ils ne sont pas indépendants et s'ils sont indépendants alors ils ......

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

"A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Si A et B sont incompatibles alors ils ne sont pas indépendants et s'ils sont indépendants alors ils ne sont pas incompatibles.

Exemple :
on lance un dé à 6 faces équilibré. On considère les évènements suivants :
A : « le résultat est pair »
B : « le résultat est 2 »
C : « le résultat est supérieur ou égal à 5 »
Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C ? Les évènements B et C ?

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$
$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$
$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.
Autre méthode : $P_A(C) = \frac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$
$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.
Autre méthode : $P_A(C) = \frac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

B et C sont incompatibles donc ne sont pas indépendants.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$
$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.
Autre méthode : $P_A(C) = \frac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

B et C sont incompatibles donc ne sont pas indépendants.
$\left(P(B \cap C) = 0 \text{ et } P(B) \times P(C) = \frac{1}{18}\right)$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors
$\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors
$\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors
$\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors
$\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Donc $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Donc $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.