Probabilités
Conditionnement et indépendance

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Définition

Soit P une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

1.2 Propriétés

• P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω.

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

$$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \qquad P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

Et pour tout événements B et C incompatibles, ($B \cap C = \emptyset$), on a : $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

• $P_A(A) = 1$

• si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$

• $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Démonstration :

— $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

— $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$ car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$

— $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$ car $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

donc $P_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - P_A(B)$

1.3 Probabilité d'une intersection

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
de même : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et par suite : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

On en déduit que :

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Remarque : si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = 0$.

1.4 Représentation par un arbre pondéré

Exemple : tous les élèves de Terminale d'un lycée ont passé un test de certification en Anglais. 80% ont réussi le test. Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé. Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les évènements T : « L'élève a réussi le test » et D : « L'élève a déjà redoublé ».

On peut représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré, en respectant certaines règles.

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

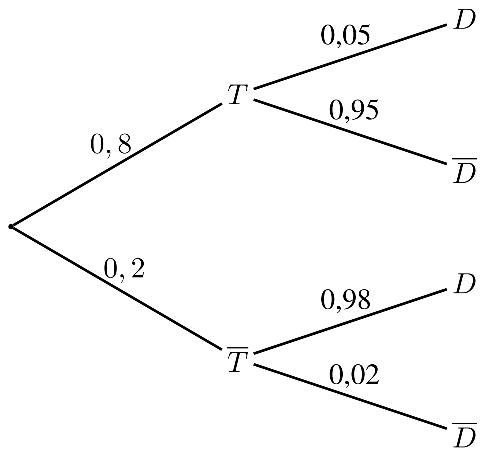
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.



Par exemple, ici : $P(D) = P(D \cap T) + P(D \cap \overline{T}) = 0,05 \times 0,8 + 0,98 \times 0,2 = 0,236$

2 Formule des probabilités totales

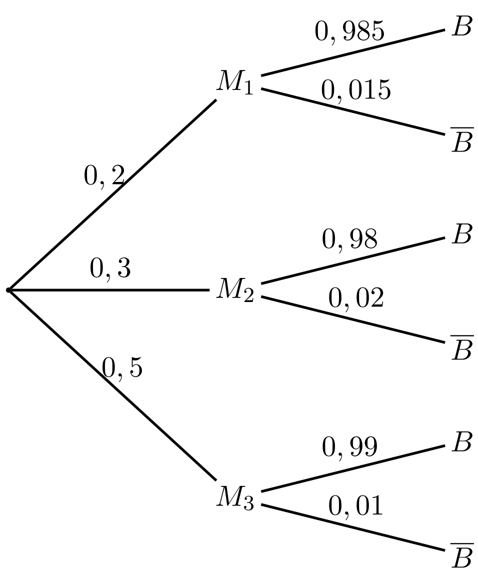
2.1 Exemple

Trois machines M_1, M_2, et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production d'une entreprise. On estime à $1,5\%$, 2% et 1% les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3. On choisit une pièce au hasard dans la production.

L'objectif est de calculer la probabilité de l'évènement B : « La pièce est bonne ».

Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'évènement : « La pièce est produite par M_i ».

On peut illustrer la situation par un arbre pondéré :



On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :
$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$

On peut détailler les calculs dans le tableau suivant :

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3	$0,5 \times 0,99$	$0,5 \times 0,01$	$P(M_3) = 0,5$
	$P(B) = 0,986$	$P(\overline{B}) = 0,014$	1

2.2 Cas général : formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, ..., A_n sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Théorème (admis) :

Si A_1, A_2, ..., A_n constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque de Ω, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

3 Indépendance

3.1 Evénéments indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles.
Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Alors $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc A est indépendant de B.

D'où la **définition** :

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Noter que si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0$

Remarque :
pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.
"A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.
"A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.
Si A et B sont incompatibles alors ils ne sont pas indépendants et s'ils sont indépendants alors ils ne sont pas incompatibles.

Exemple :
on lance un dé à 6 faces équilibré. On considère les évènements suivants :
A : « le résultat est pair »
B : « le résultat est 2 »
C : « le résultat est supérieur ou égal à 5 »
Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C ? Les évènements B et C ?

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$, $P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{1}{6}$ d'où $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{12}$
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$, $P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(C) = \dfrac{1}{3}$ d'où $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{6}$
$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.
Autre méthode : $P_A(C) = \dfrac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

B et C sont incompatibles donc ne sont pas indépendants.
$\left(P(B \cap C) = 0 \text{ et } P(B) \times P(C) = \dfrac{1}{18} \right)$

3.2 Passage aux événements contraires

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC) :
A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Donc $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.