

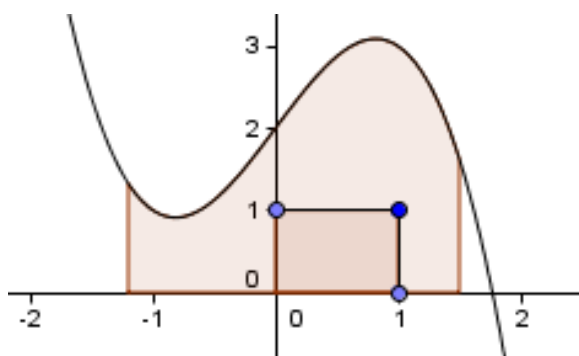
CALCUL INTEGRAL

1 Intégrale d'une fonction continue et positive

1.1 Définition

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

On appelle **intégrale de f sur $[a; b]$** , l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



L'intégrale de f sur $[a; b]$ se note $\int_a^b f(x)dx$.

On dit aussi que $\int_a^b f(x)dx$ représente **l'aire sous la courbe** entre a et b .

1.2 Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \dots$$

$\int_a^b f(x)dx$ se lit aussi " somme de a à b de $f(x)dx$ ".

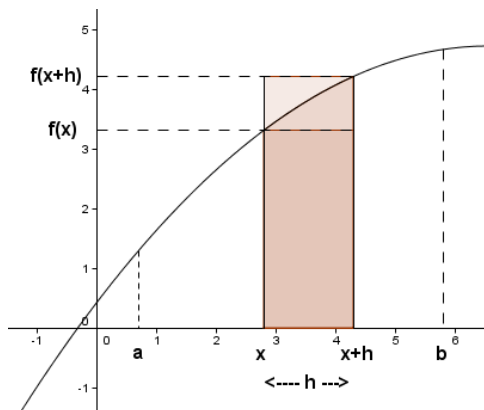
1.3 Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $[a; b]$.
De plus $F(a) = 0$.

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$.

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de la surface limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses x et $x+h$.



On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ ce qui signifie que F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$.

2 Primitives et intégrale

2.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f .

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que " f est la fonction dérivée de F sur I ".

2.2 Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.

Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un minimum m sur $[a; b]$ et on définit une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;

g est continue et positive sur $[a; b]$, donc admet une primitive G définie par $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.
Alors la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a; b]$.

2.3 Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I , alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de f sur I .

Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque.

2.4 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I , telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

2.5 Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

- si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I .

2.6 Primitives des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I =]0; +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J , dérivable et strictement positive sur un intervalle K .

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$
$f(x) = \sin(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$
$f = u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$	$I = J$	$F(x) = e^u$
$f = \frac{u'}{u}$	$I = K$	$F(x) = \ln u$

3 Intégrale d'une fonction continue

3.1 Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.

On note :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt \text{ et } G(a) = 0 \text{ donc on a bien } G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :

si F une primitive quelconque de f , alors $F(x) = G(x) + c$ et on vérifie alors que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

3.2 Définition

On généralise la notion d'intégrale :

soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I .

On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.

On note :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

3.3 Exemple

$$\text{Pour } x > 0, \quad \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

3.4 Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a , b et c des éléments de I .

—

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

— Inversion des bornes

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

— Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

— Linéarité

si k est un réel quelconque, alors

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

— Linéarité

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

4 Calcul d'aires

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

— L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

$$A = - \int_a^b f(x) dx \quad \text{si } f \text{ est négative sur } [a; b]$$

— si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

5 Intégrales et inégalités

5.1 Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Démonstration : par définition, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ où F une primitive de f sur $[a; b]$, c'est-à-dire $F' = f$; donc, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors F est croissante sur $[a; b]$; donc $F(b) \geq F(a)$ et $F(b) - F(a) \geq 0$.

5.2 Intégration d'une inégalité

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Pour la démonstration, considérer la fonction $h = g - f$.

5.3 Encadrement

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \frac{b-a}{n}$.

Sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

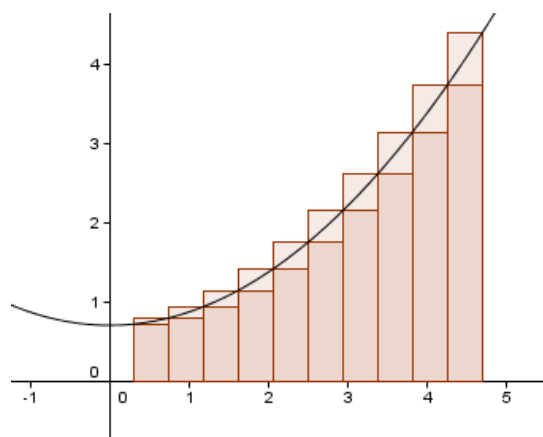
$$f(a + ih) \leq f(x) \leq f(a + (i+1)h)$$

Donc $hf(a + ih) \leq \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x) dx \leq hf(a + (i+1)h)$, où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih) \leq \int_a^b f(x) dx \leq h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i+1)h)$$

On peut écrire un programme afin d'effectuer ce calcul.



Algorithme

Les variables sont a et b les bornes de l'intervalle, n le nombre de rectangles, h le pas (la largeur des rectangles), x l'abscisse courante, $s1$ et $s2$ les sommes des aires.

```

h ← (b - a)/n
s1 ← 0
s2 ← 0
x ← a
POUR i variant de 0 à n - 1
    s1 ← s1 + f(x)
    x ← x + h
    s2 ← s2 + f(x)
FIN POUR
s1 ← h * s1
s2 ← h * s2

```

Si la fonction f est simplement continue sur $[a; b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant $f(x)$, sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i + 1)h]$, par : $f(a + (i + 1/2)h)$.

5.4 Valeur moyenne

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$\text{et si } a < b, \quad m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

Démonstration à l'aide du théorème précédent.

Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$