Fonctions de référence 2

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition et propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que quel que soit le réel a strictement positif, il existe un réel unique x tel que $\mathrm{e}^x = a$.

Définition

Si a est un réel strictement positif, la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^x = a$, d'inconnue x, s'appelle **logarithme népérien** de a, et on note $x = \ln a$.

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par : $x \longmapsto \ln x$.
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

$$y = \ln x \Longleftrightarrow \mathrm{e}^y = x$$

On dit que la fonction $\ln$ est la **fonction réciproque** de la fonction $\exp$.

Ainsi : $\ln 1 = 0$ puisque $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\ln \mathrm{e} = 1$ puisque $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
De plus : si $\ln x = y$ alors $x = \mathrm{e}^y$ et $\dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{-y}$ soit $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -y$.
On obtient donc, pour tout réel x strictement positif :

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

Propriété

Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ et pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$

1.2 Variations et limites

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration partielle
On admet que la fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Si on pose $f(x) = \exp(\ln x) = x$, alors $f'(x) = \ln'(x) \times \exp(\ln x) = \ln'(x) \times x$.
Or $f'(x) = 1$, d'où $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$; puisque sa dérivée est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$, on conclut que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Corollaire :

Pour tout réels a et b strictement positifs,

$$a < b \Longleftrightarrow \ln a < \ln b \text{ et } a = b \Longleftrightarrow \ln a = \ln b$$

En particulier : $0 < x < 1$ équivaut à $\ln x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln x > 0$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : quel que soit le réel A, si $x > \mathrm{e}^A$ alors $\ln x > A$; donc l'intervalle $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.

Ensuite : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} -\ln \dfrac{1}{x}$; or, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$

Donc, par composition, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

Tableau de variation et représentation graphique

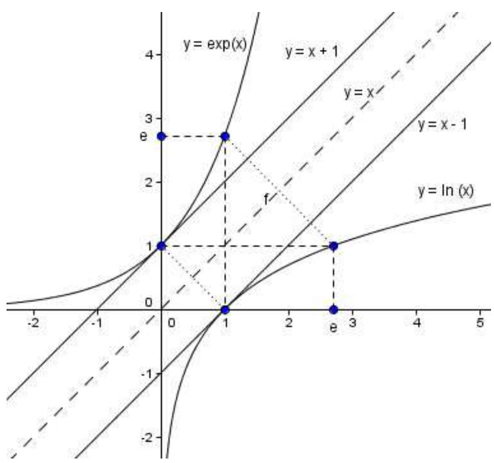
On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents. Puisque la fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$, les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La courbe passe par les points de coordonnées $(1 ; 0)$ et $(\mathrm{e} ; 1)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\ln'(1) = 1$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une asymptote d'équation $x = 0$, soit l'axe des ordonnées.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\Vert$	$+$
$\ln x$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



1.3 Relation fonctionnelle

La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$. On peut donc déduire une relation fonctionnelle pour la fonction $\ln$ à partir de celle existant pour la fonction $\exp$:

pour tout réels x et y, $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$

donc $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x+y)) = x+y$;

si on pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$, soit $x = \ln a$ et $y = \ln b$ on obtient :

Théorème

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

Remarque

Si $a = b$, la relation fonctionnelle nous donne : $\ln(a^2) = 2\ln a$.

On peut alors en déduire : $\ln x = \ln((\sqrt{x})^2) = 2\ln(\sqrt{x})$, soit $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$.

1.3.1 Propriétés

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad \ln(a^n) = n\ln a$$

Démonstration

- La deuxième propriété a déjà été prouvée.

- pour la première propriété, on utilise la relation fonctionnelle :

$\ln\dfrac{a}{b} = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b.$

- pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n\ln a$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0\ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ;
soit $\ln(a^k) = k\ln a$.
Alors $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln a = k\ln a + \ln a$ d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1)\ln a$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, si n est un entier relatif négatif, $\ln(a^n) = \ln\dfrac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$
or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\ln(a^{-n}) = (-n)\ln a$
On en déduit que : $\ln(a^n) = n\ln a$.

1.4 Compléments

1.4.1 Calcul de limites

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration

• On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$ donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction $\ln$). On en déduit que pour tout x strictement positif $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x}$ et donc $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Alors, pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

De plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc par application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Remarque

On pouvait aussi écrire $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\exp(X)} = \dfrac{1}{\frac{\exp(X)}{X}}$, et appliquer les théorèmes sur la composition et l'inverse de limites.

• $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ en 1.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction $\ln$ en 1 qui est 1.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = 1$.

1.4.2 Calcul de dérivées

On montre que :

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Par exemple, on obtient pour tout $x > -\frac{b}{a}$:

$$(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$$

Remarque

u étant strictement positive, le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u'.

Cette dérivée satisfait à la formule générale :

$$(f(u(x))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

2 Fonction logarithme décimal

2.1 Définition

On appelle fonction **logarithme décimal** la fonction notée $\log$, définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

En particulier : $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$.

2.2 Propriétés

Les propriétés de la fonction logarithme décimal se déduisent immédiatement de celles de la fonction $\ln$.

Par exemple, pour tout entier relatif n, $\log 10^n = \dfrac{\ln 10^n}{\ln 10} = \dfrac{n \ln 10}{\ln 10} = n$.

2.2.1 Dérivée

La fonction logarithme décimal est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

2.2.2 Variations

La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2.2.3 Limites

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \log x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \log x = -\infty$$

2.2.4 Relations fonctionnelles

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs :

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \qquad \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b \qquad \log(a^n) = n \log a$$