

Fonctions de référence 2

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition et propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que quel que soit le réel a strictement positif, il existe un réel unique x tel que $e^x = a$.

Définition

Si a est un réel strictement positif, la solution unique sur \mathbb{R} de l'équation $e^x = a$, d'inconnue x , s'appelle

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$ par :
Autrement dit, pour tout x strictement positif,
.....

On dit que la fonction \ln est la de la fonction \exp .

Ainsi : $\ln 1 = 0$ puisque $e^0 = 1$ et $\ln e = 1$ puisque $e^1 = e$.

De plus : si $\ln x = y$ alors $x = e^y$ et $\frac{1}{x} = e^{-y}$ soit $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -y$.

On obtient donc, pour tout réel x strictement positif :

$$\ln \frac{1}{x} = \dots\dots$$

Propriété

Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$ et pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$

1.2 Variations et limites

Propriété

La fonction logarithme népérien est

Démonstration partielle

On admet que la fonction \ln est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Si on pose $f(x) = \exp(\ln x) = x$, alors $f'(x) = \dots\dots\dots$

Or $f'(x) = 1$, d'où $\ln'(x) = \dots$

Théorème

La fonction logarithme népérien est

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$; puisque sa dérivée est strictement positive sur $]0; +\infty[$, on conclut que la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Corollaire :

Pour tout réels a et b strictement positifs,

En particulier : $0 < x < 1$ équivaut à $\ln x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln x > 0$.

Théorème

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \dots\dots$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = \dots\dots$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini :

Ensuite : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln \frac{1}{x}$; or,

Donc, par composition, on obtient

Tableau de variation et représentation graphique

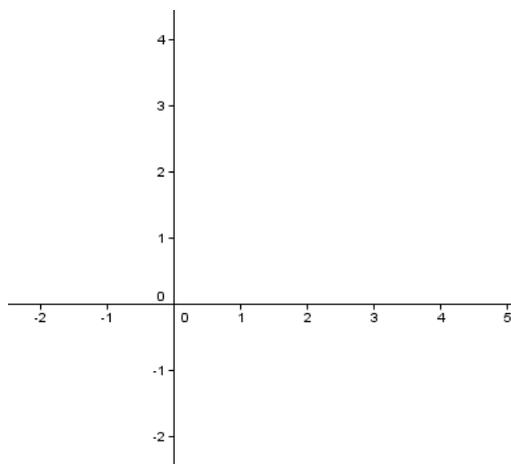
On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents. Puisque la fonction \ln est la réciproque de la fonction \exp , les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La courbe passe par les points de coordonnées $(1; 0)$ et $(e; 1)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\ln'(1) = 1$.

Puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une asymptote d'équation $x = 0$, soit l'axe des ordonnées.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		
$\ln x$		



1.3 Relation fonctionnelle

La fonction \ln est la réciproque de la fonction \exp . On peut donc déduire une relation fonctionnelle pour la fonction \ln à partir de celle existant pour la fonction \exp :

pour tout réels x et y , $\exp(x) \exp(y) = \exp(x + y)$

donc $\ln(\exp(x) \exp(y)) = \ln(\exp(x + y)) = x + y$;

si on pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$, soit $x = \ln a$ et $y = \ln b$ on obtient :

Théorème

Quels que soient les réels a et b , strictement positifs :

.....

Remarque

Si $a = b$, la relation fonctionnelle nous donne : $\ln(a^2) = 2 \ln a$.

On peut alors en déduire : $\ln x = \ln((\sqrt{x})^2) = 2 \ln(\sqrt{x})$, soit $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$.

1.3.1 Propriétés

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

.....

Démonstration

• La deuxième propriété a déjà été prouvée.

• pour la première propriété, on utilise la relation fonctionnelle :

$$\ln \frac{a}{b} = \dots\dots\dots$$

• pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ;

soit

$$\text{Alors } \ln(a^{k+1}) = \dots\dots\dots$$

.....

Conclusion :

Maintenant, si n est un entier relatif négatif, $\ln(a^n) = \ln \frac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\ln(a^{-n}) = (-n) \ln a$

On en déduit que : $\ln(a^n) = n \ln a$.

1.4 Compléments

1.4.1 Calcul de limites

Théorème

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \dots$$

Démonstration

• On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$ donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction \ln). On en déduit que pour tout x strictement positif $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x}$ et donc $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Alors, pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire : $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc par application du théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Remarque

On pouvait aussi écrire $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{\exp(X)} = \frac{1}{\frac{\exp(X)}{X}}$, et appliquer les théorèmes sur la composition et l'inverse de limites.

• $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$ est

Sa limite quand x tend vers 0 est

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \dots$

1.4.2 Calcul de dérivées

On montre que :

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)'(x) = \dots$$

Par exemple, on obtient pour tout $x > -\frac{b}{a}$:

$$(\ln(ax+b))' = \dots$$

Remarque

u étant strictement positive, le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u' .

Cette dérivée satisfait à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

2 Fonction logarithme décimal

2.1 Définition

On appelle fonction **logarithme décimal** la fonction notée \log , définie sur $]0; +\infty[$ par :

.....

En particulier : $\log 1 = \dots$, $\log 10 = \dots$

2.2 Propriétés

Les propriétés de la fonction logarithme décimal se déduisent immédiatement de celles de la fonction \ln .

Par exemple, pour tout entier relatif n , $\log 10^n = \dots$

2.2.1 Dérivée

La fonction logarithme décimal est

.....

2.2.2 Variations

La fonction logarithme décimal est

2.2.3 Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log x = \dots$$

2.2.4 Relations fonctionnelles

Quels que soient les réels a et b , strictement positifs :

$$\log(a \times b) = \dots$$

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \dots \quad \log\left(\frac{1}{b}\right) = \dots \quad \log(a^n) = \dots$$