Fonctions de référence 1

1 Les fonctions sinus et cosinus

1.1 Définitions

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M. On note :

$$\cos : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M. On note :

$$\sin : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$$

Ainsi, les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

1.2 Dérivées

1.2.1 Théorème admis

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \text{et} \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

1.2.2 Calcul de dérivées

Soit a et b deux réels :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = a\cos(ax + b)$$

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = -a\sin(ax + b)$$

Démonstration :

On sait que si $f(x) = g(ax + b)$, alors $f'(x) = ag'(ax + b)$ (voir le cours sur les dérivées).
Il suffit d'appliquer cette formule en prenant pour g la fonction sinus ou la fonction cosinus.

1.3 Propriétés

1.3.1 Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \text{et} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π.

Application : il suffit de connaître les valeurs prises par les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π pour déterminer les valeurs de ces fonctions pour tout réel x. En particulier, pour le tracé des courbes représentatives, il suffit de tracer les courbes sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ par exemple puis de compléter par des translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$. ($\vec{i}$ étant le vecteur unitaire en abscisse).

1.3.2 Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \text{et} \qquad \cos(-x) = \cos x$$

On dit que la fonction sinus est **impaire** et que la fonction cosinus est **paire**.

Conséquence : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Application : pour le tracé des courbes représentatives dans un repère orthogonal, on peut se restreindre à l'intervalle $[0; \pi]$, puis compléter sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ à l'aide des symétries précisées ci-dessus et enfin utiliser les translations comme précédemment.

1.3.3 Limite

Propriété : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\dfrac{\sin(0+x) - \sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 qui est $\cos 0 = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(0+x) - \sin 0}{x} = 1$.

1.4 Variations et représentations graphiques

Grâce aux propriétés de périodicité et de parité énoncées plus haut, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.

Le signe des fonctions dérivées s'obtient avec le cercle trigonométrique.

Fonction cosinus

x	0		π
$f'(x) = -\sin x$	0	$-$	0
$f(x) = \cos x$	1	$\searrow$	-1

Fonction sinus

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x) = \sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

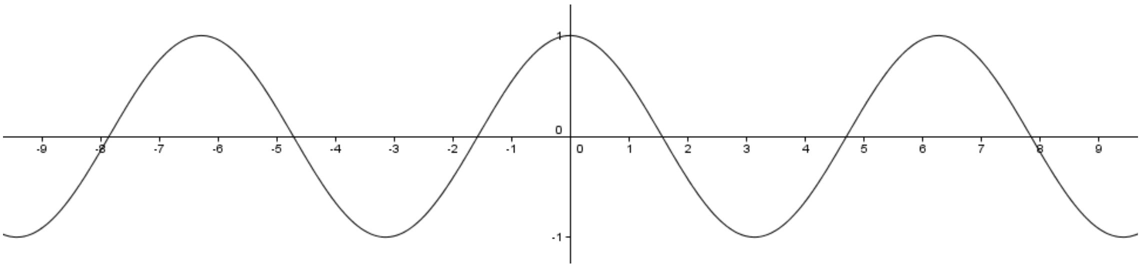


FIGURE 1 – *Courbe représentative de la fonction cosinus*

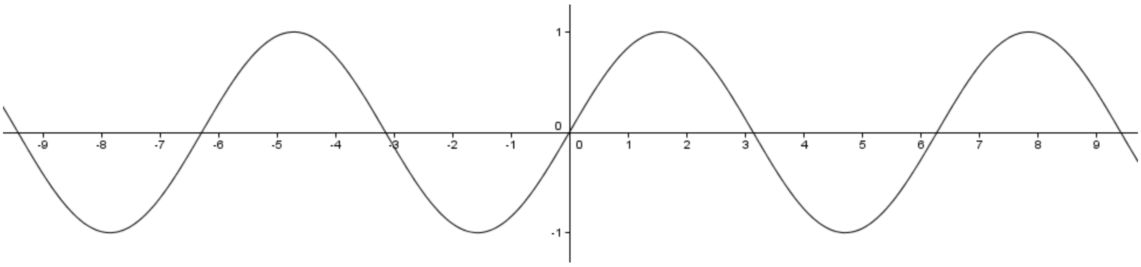


FIGURE 2 – *Courbe représentative de la fonction sinus*

2 La fonction exponentielle

2.1 Théorème et définition

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriété
Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,
soit $\exp(x)\exp(-x) = 1$, d'où on conclut que $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration du théorème
L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut définir pour tout x réel une fonction u par $u(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(x)}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.
Alors $(u(x))' = \dfrac{g'(x)\exp(x) - g(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2} = \dfrac{g(x)\exp(x) - g(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$
La fonction u de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $u(0) = 1$, on en déduit que $u(x) = 1$ pour tout x réel. Ceci signifie que $g(x) = \exp(x)$ pour tout x réel.

Propriété :
la fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.
Démonstration : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$; s'il existe un réel x tel que $\exp(x) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe a réel tel que $\exp(a) = 0$. Or ceci est impossible puisque pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

2.2 Relation fonctionnelle

Théorème

Quels que soient les réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$$

Démonstration :
Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel, $g(x) = \dfrac{\exp(x + a)}{\exp(x)}$;

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \frac{\exp'(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$= \frac{\exp(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp(x)}{(\exp(x))^2}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

soit $g(x) = g(0) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a)$ pour tout x réel.

En particulier pour $x = b$, on obtient $g(b) = \dfrac{\exp(a+b)}{\exp(b)} = \exp(a)$

d'où on déduit que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2})) = \big(\exp(\frac{x}{2})\big)^2$.

Puisqu'un carré est positif et que $\exp(x) \neq 0$, on montre à nouveau que $\exp(x) > 0$ pour tout x.

2.2.1 Propriétés

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)} \qquad \exp(na) = (\exp a)^n$$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a-b)+b) = \exp(a-b)\exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- l'égalité précédente avec $a = 0$ donne $\exp(-b) = \dfrac{\exp(0)}{\exp(b)} = \dfrac{1}{\exp(b)}$

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ;

soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$.

Alors $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$ d'après l'hypothèse de récurrence,

donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, si n est un entier relatif négatif, $\exp(na) = \dfrac{1}{\exp(-na)}$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

On en déduit que : $\exp(na) = \dfrac{1}{(\exp(a))^{-n}} = (\exp a)^n$.

2.2.2 Notations

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle : $\exp(1) = \mathrm{e}$.

$\mathrm{e} \simeq 2,718\ldots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π.

On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

On peut donc écrire : $\mathrm{e}^0 = 1$ et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{-b} = \frac{1}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$$

De plus, quels que soient les réels a, b : $\mathrm{e}^{ab} = (\mathrm{e}^a)^b$
Par exemple : $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^x$ donc $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$ et en particulier, $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

2.3 Variations et limites

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par définition, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$ pour tout x réel ; puisque sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on conclut que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire :

$$a < b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \qquad \text{et} \qquad a = b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$$

En particulier : si $x < 0$ alors $\mathrm{e}^x < 1$ et si $x > 0$ alors $\mathrm{e}^x > 1$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Démonstration
On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$. La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$ d'où : $\mathrm{e}^x > x$.
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent).

Tableau de variation et représentation graphique

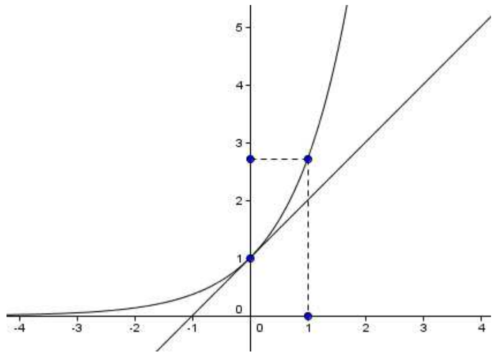
On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.

La courbe passe par les points de coordonnées $(0;1)$ et $(1;\mathrm{e})$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\mathrm{e}^0 = 1$.

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, la courbe représentative de la fonction exponentielle admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$, soit l'axe des abscisses.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \exp x$	$+$
$f(x) = \exp x$	$0 \nearrow +\infty$



2.4 Compléments

2.4.1 Calcul de limites

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente, $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[,\ g(x) > 0$, soit $\mathrm{e}^x > \frac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent.)

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{\mathrm{e}^{0+x} - \mathrm{e}^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{0+x} - \mathrm{e}^0}{x} = 1$.

2.4.2 Calcul de dérivées

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k\exp(-kx)$$

Plus généralement, on montre que :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction e^u est dérivable sur I et $$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(\mathrm{e}^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : $(\exp(-kx^2))' = -2kx\exp(-kx^2)$