Cours de terminale S
Généralités sur les fonctions

V. B. J. D. S. B.

Lycée des EK

28 septembre 2019

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient . . . .
. . . .

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Graphiquement :

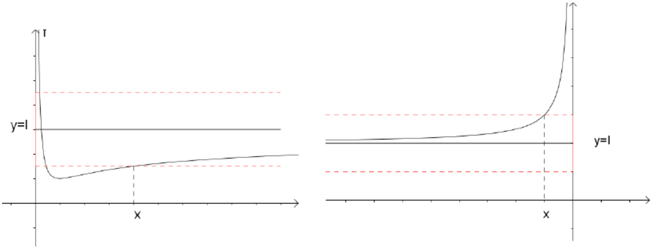


FIGURE – *A gauche limite en* $+\infty$ *et à droite en* $-\infty$

Graphiquement :

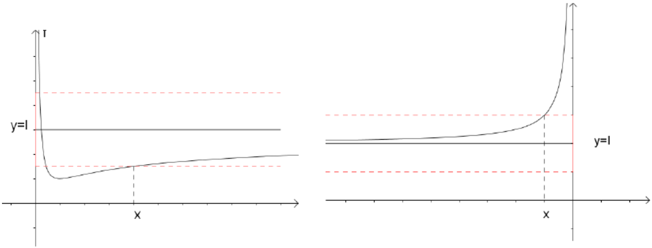


FIGURE – *A gauche limite en $+\infty$ et à droite en $-\infty$*

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on dit que, dans un repère, la droite d d'équation $y = \ell$ est . . . .

. . . .

Graphiquement :

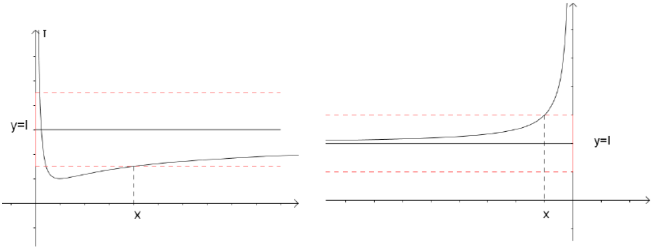


FIGURE – *A gauche limite en $+\infty$ et à droite en $-\infty$*

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on dit que, dans un repère, la droite d d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemples :

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient . . . .
. . . .

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples :

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 =$$

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient . . . .
. . . .

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient . . . .

. . . .

. . . .

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)=+\infty$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x<a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x)=+\infty$).

Définition

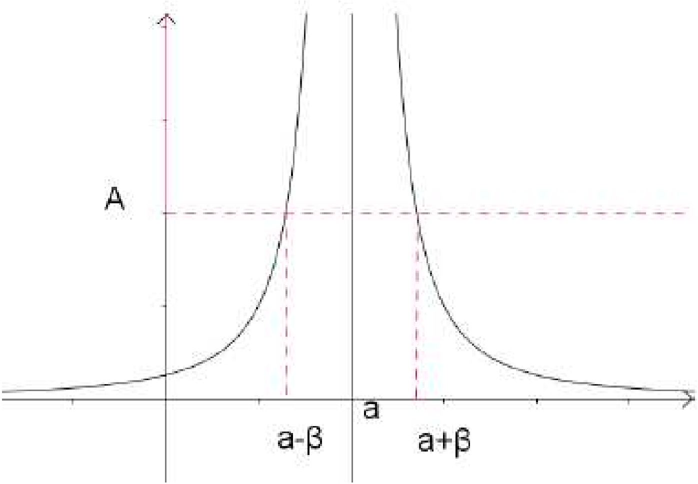
Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = +\infty$).

Remarque : on définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Graphiquement :



Définition

Lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est ....

Définition

Lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

Définition

Lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$\text{"}\infty - \infty\text{"}, \quad \text{"}0 \times \infty\text{"}, \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"},$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty", \quad "\frac{0}{0}", \quad "\frac{\infty}{\infty}"$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) =$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} =$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) =$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) =$$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0^+$$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

On a alors une asymptote verticale d'équation

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

On a alors une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples.

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\left(u(x)\right)$$

$$x \xrightarrow{v \circ u} v\left(u(x)\right)$$

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la . . . .

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Elle est notée $v \circ u$, ou parfois $v(u)$.

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Elle est notée $v \circ u$, ou parfois $v(u)$.

Pour tout réel x de I : $v \circ u(x) = v(u(x))$

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = \ \ldots$

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x + 1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \ldots$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ldots$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

Théorème des gendarmes

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors ....

Théorème des gendarmes

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Théorème des gendarmes

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Remarque : on obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).

Exemples :

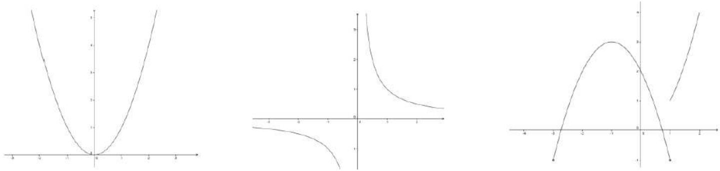


FIGURE – *La fonction carré est continue sur* $\mathbb{R}$*, la fonction inverse est continue sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0;+\infty[$ *mais n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$*.* f *est définie mais pas continue sur* $[-3;2]$ *; il y a une rupture en* $x=1$*.*

Théorème (admis)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est . . . . sur I.

Théorème (admis)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Théorème (admis)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

Théorème (admis)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.

Théorème (admis)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.
- Une fonction f est dérivable en a si sa courbe C_f admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a.

Remarque :

La réciproque de ce théorème est . . . . . .

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur . . . . . .
. . . .

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur . . . . . .
. . . .

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Convention dans un tableau de variations :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

Convention dans un tableau de variations :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la . . . .

Convention dans un tableau de variations :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction sur cet intervalle.

Convention dans un tableau de variations :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe . . . .
. . . .
. . . .

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, f prend, entre a et b, toute ....
....

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, f prend, entre a et b, toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, f prend, entre a et b, toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

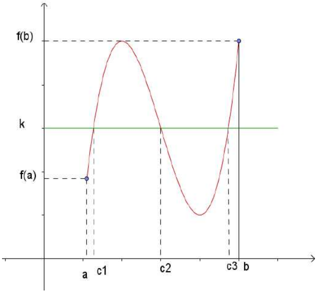


Illustration graphique

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet ....
......

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

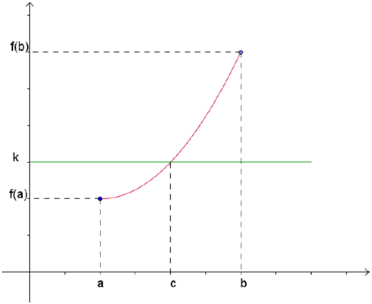
Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

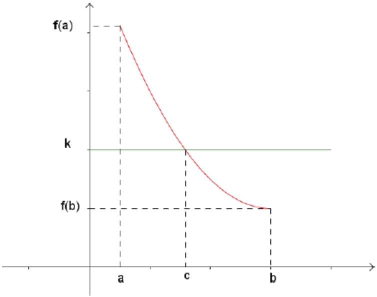
Remarque :
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.

Illustration graphique :

- Cas où f est strictement croissante



- Cas où f est strictement décroissante



Tableaux de variations :

x	a	c	b
$f(x)$			$f(b)$
		$\nearrow k \nearrow$	
	$f(a)$		

x	a	c	b
$f(x)$	$f(a)$		
		$\searrow k \searrow$	
			$f(b)$

Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Théorème

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.
Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = \dots\dots\dots\dots$$

Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Théorème

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.
Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Théorème

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.
Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \dots\dots\dots$$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $\left(\sqrt{u}\right)' = \ldots\ldots\ldots$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = \ldots\ldots\ldots$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \ldots\ldots\ldots$$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = \ldots\ldots\ldots$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$.

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$.

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée

$$x \longmapsto v(u(x))$$

On admettra le résultat général :

$$(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée

$$x \longmapsto v(u(x))$$

On admettra le résultat général :

$$(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée

$$x \longmapsto v(u(x))$$

On admettra le résultat général :

$$(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation :

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, la fonction $u^1 = u$ est dérivable sur I.

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, la fonction $u^1 = u$ est dérivable sur I. Sa dérivée est : $(u^1)' = u' = 1.u'.u^0$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. ($u^{k+1} = u^k.u$)

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. ($u^{k+1} = u^k.u$)
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. ($u^{k+1} = u^k.u$)
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. ($u^{k+1} = u^k.u$)
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' = ku'u^k + u^k.u' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' = ku'u^k + u^k.u' = (k+1)u'u^k$.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. ($u^{k+1} = u^k.u$)
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' = ku'u^k + u^k.u' = (k+1)u'u^k$.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.