Généralités sur les fonctions

1 Limite d'une fonction à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini

Définition :
Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Graphiquement :

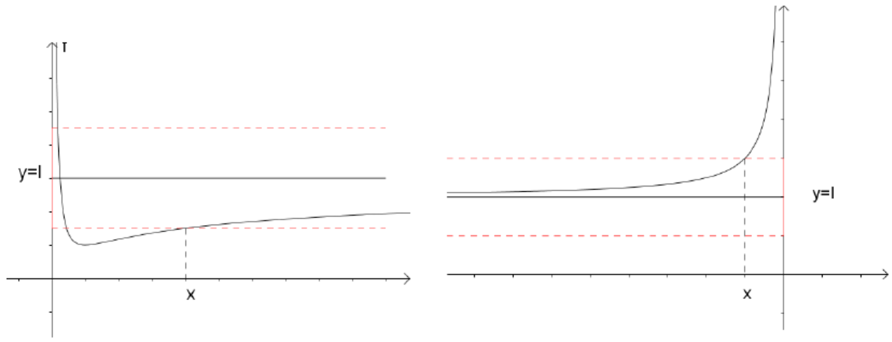


FIGURE 1 – *A gauche limite en $+\infty$ et à droite en $-\infty$*

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on dit que, dans un repère, la droite d d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemples :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

1.2 Limite infinie à l'infini

Définition :
Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

2 Limite infinie d'une fonction en un réel a

2.1 Limite infinie

Définition :
Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

On note $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

2.2 Limite à droite ou à gauche

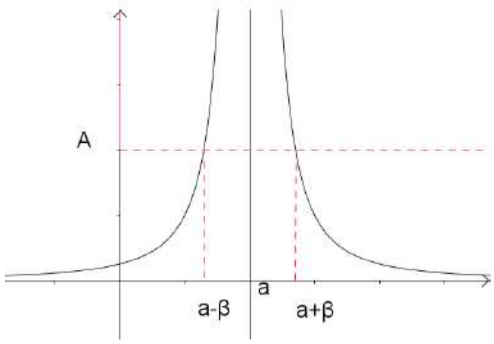
Définition :
Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = +\infty$).

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Graphiquement :



Définition : lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Exemples :

$\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

3 Détermination de limites

3.1 Limites et opérations

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", " \tfrac{0}{0} ", " \tfrac{\infty}{\infty} "$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Limite en 2^+ et en 2^- :
$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$
De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$
On a alors une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3.2 Limite d'une composée

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples.

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\left(u(x)\right)$$

$$x \xrightarrow{vou} v\left(u(x)\right)$$

Définition :
Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Elle est notée $v \circ u$, ou parfois $v(u)$.

Pour tout réel x de I : $v \circ u(x) = v(u(x))$

Théorème :

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.
On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3.3 Limite et comparaisons

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème :

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes :

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Remarque : on obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

4 Continuité

4.1 Notion intuitive de continuité

Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).

Exemples :

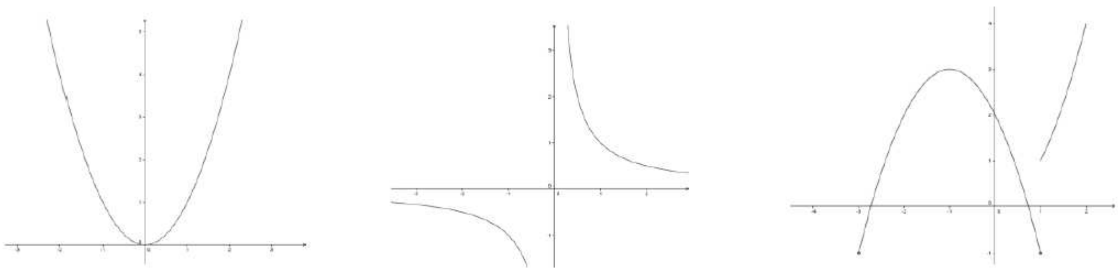


FIGURE 2 – *La fonction carré, la fonction inverse et une fonction f*

La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. f est définie mais pas continue sur $[-3;2]$; il y a une rupture en $x = 1$.

Théorème (admis) :

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.
- Une fonction f est dérivable en a si sa courbe C_f admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0;+\infty[$.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Convention dans un tableau de variations :
Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :
— la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
— la continuité de la fonction sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, f prend, entre a et b, toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

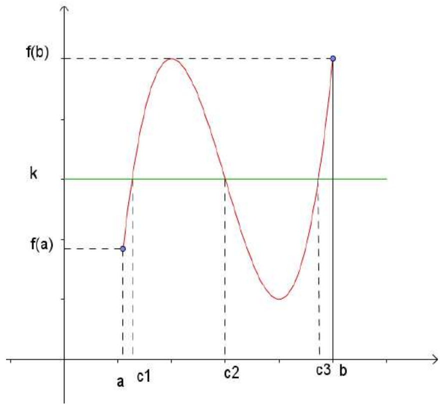


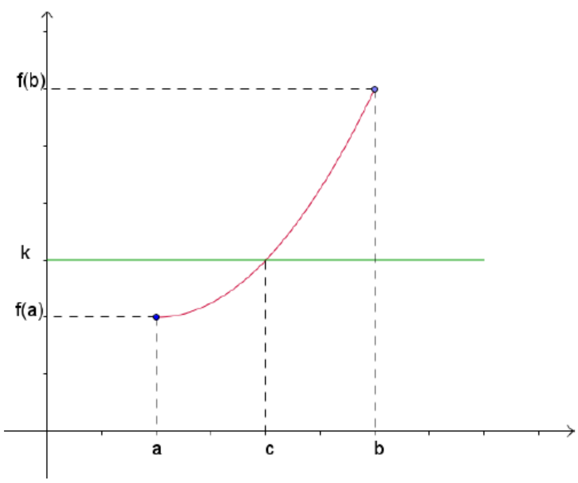
Illustration graphique

Corollaire :
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

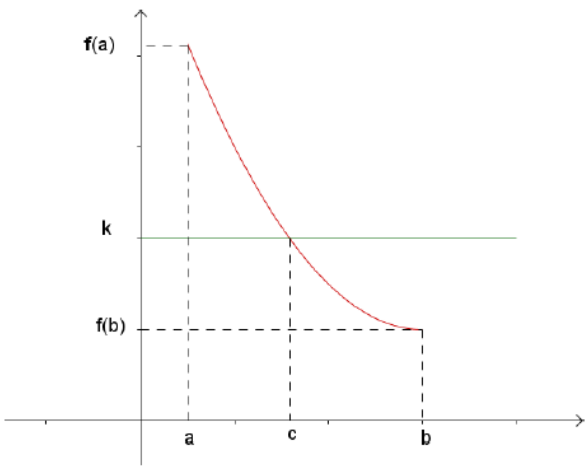
Remarque :
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.

Illustration graphique :

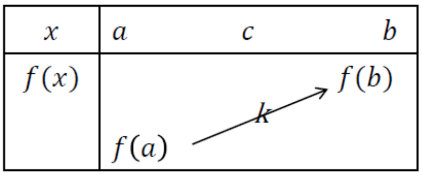
- Cas où f est strictement croissante

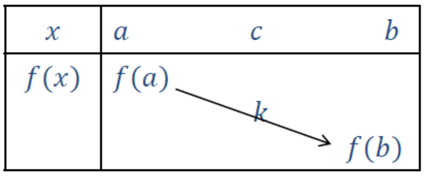


- Cas où f est strictement décroissante



Tableaux de variations :





5 Calcul de dérivées

5.1 Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Théorème :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.

Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

5.2 Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et $x \longmapsto (u(x))^n$

Propriété 1 :

On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 2 :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée $x \longmapsto v(u(x))$. On admettra le résultat général : $(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x))$.

Preuve de la propriété 2 (premier point) :

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, la fonction $u^1 = u$ est dérivable sur I.
Sa dérivée est : $(u^1)' = u' = 1.u'.u^0$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' = ku'u^k + u^k.u' = (k+1)u'u^k$.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.