Cours de terminale S
Fonctions de référence
La fonction logarithme népérien

V. B. J. D. S. B.

Lycée des EK

7 octobre 2019

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que quel que soit le réel a strictement positif, il existe un réel unique x tel que $e^x = a$.

Définition

Si a est un réel strictement positif, la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, s'appelle ....
....

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que quel que soit le réel a strictement positif, il existe un réel unique x tel que $e^x = a$.

Définition

Si a est un réel strictement positif, la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, s'appelle **logarithme népérien** de a, et on note $x = \ln a$.

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par :

....

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par : $x \longmapsto \ln x$.

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$ par :
$x \longmapsto \ln x$.
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

. . . .

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par : $x \longmapsto \ln x$.
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

$$y = \ln x \Longleftrightarrow e^y = x$$

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \longmapsto \ln x$.
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

$$y = \ln x \iff e^y = x$$

On dit que la fonction ln est la .... de la fonction exp.

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par : $x \longmapsto \ln x$.
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

$$y = \ln x \Longleftrightarrow e^y = x$$

On dit que la fonction $\ln$ est la **fonction réciproque** de la fonction $\exp$.

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par :
$x \longmapsto \ln x$.
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

$$y = \ln x \iff e^y = x$$

On dit que la fonction ln est la **fonction réciproque** de la fonction exp.

Ainsi : $\ln 1 = 0$ puisque $e^0 = 1$ et $\ln e = 1$ puisque $e^1 = e$.

De plus : si $\ln x = y$ alors $x = e^y$ et $\dfrac{1}{x} = e^{-y}$ soit $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -y$.

De plus : si $\ln x = y$ alors $x = \mathrm{e}^{y}$ et $\dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{-y}$ soit $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -y$.

On obtient donc, pour tout réel x strictement positif :

$$\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

De plus : si $\ln x = y$ alors $x = e^y$ et $\dfrac{1}{x} = e^{-y}$ soit $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -y$.

On obtient donc, pour tout réel x strictement positif :

$$\boxed{\ln \frac{1}{x} = -\ln x}$$

Propriété

Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$

et pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$

Propriété

La fonction logarithme népérien est . . . .
. . . .

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démonstration partielle

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration partielle

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Si on pose $f(x) = \exp(\ln x) = x$,
alors $f'(x) =$.............................

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration partielle

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Si on pose $f(x) = \exp(\ln x) = x$,
alors $f'(x) = \ln'(x) \times \exp(\ln x) = \ln'(x) \times x$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration partielle

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Si on pose $f(x) = \exp(\ln x) = x$,
alors $f'(x) = \ln'(x) \times \exp(\ln x) = \ln'(x) \times x$.
Or $f'(x) = 1$, d'où $\ln'(x) = \ldots$

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démonstration partielle

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Si on pose $f(x)=\exp(\ln x)=x$,
alors $f'(x)=\ln'(x)\times\exp(\ln x)=\ln'(x)\times x$.
Or $f'(x)=1$, d'où $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Théorème

La fonction logarithme népérien est . . . .
. . . .

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$; puisque sa dérivée est strictement positive sur $]0;+\infty[$, on conclut que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Corollaire

Pour tout réels a et b strictement positifs,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Corollaire

Pour tout réels a et b strictement positifs,

$$a < b \iff \ln a < \ln b \qquad \text{et} \qquad a = b \iff \ln a = \ln b$$

Corollaire

Pour tout réels a et b strictement positifs,

$$a < b \iff \ln a < \ln b \qquad \text{et} \qquad a = b \iff \ln a = \ln b$$

En particulier : $0 < x < 1$ équivaut à $\ln x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln x > 0$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = \ldots\ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \ldots\ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : . . . .

. . . .

. . . .

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : quel que soit le réel A, si $x > e^A$ alors $\ln x > A$; donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : quel que soit le réel A, si $x > e^A$ alors $\ln x > A$; donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.

Ensuite : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} -\ln \dfrac{1}{x}$;

or, ...

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : quel que soit le réel A, si $x > e^A$ alors $\ln x > A$; donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.

Ensuite : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} -\ln \frac{1}{x}$;

or, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : quel que soit le réel A, si $x > e^A$ alors $\ln x > A$; donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.

Ensuite : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln \dfrac{1}{x}$;

or, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$

Donc, par composition, on obtient . . . .

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : quel que soit le réel A, si $x > e^A$ alors $\ln x > A$; donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.

Ensuite : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} -\ln \dfrac{1}{x}$;

or, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$

Donc, par composition, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents. Puisque la fonction ln est la réciproque de la fonction exp, les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La courbe passe par les points de coordonnées $(1; 0)$ et $(e; 1)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\ln'(1) = 1$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une asymptote d'équation $x = 0$, soit l'axe des ordonnées.

Fonction logarithme népérien

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \ln x$	

Fonction logarithme népérien

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \ln x$	

Fonction logarithme népérien

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$+$
$f(x) = \ln x$	

Fonction logarithme népérien

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$+$
$f(x) = \ln x$	$-\infty$

Fonction logarithme népérien

x	0		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$	
$f(x) = \ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Fonction logarithme népérien

x	0		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\|$	$+$	
$f(x) = \ln x$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

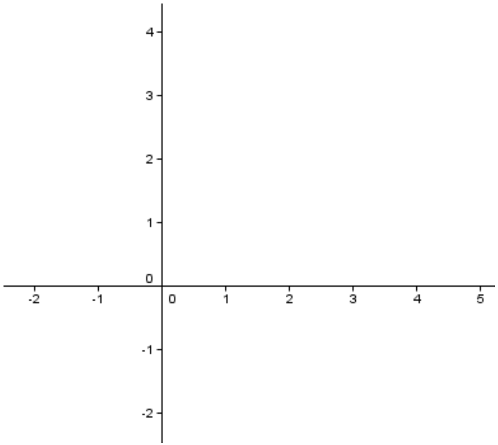

FIGURE – *Courbe représentative de la fonction* $\ln$

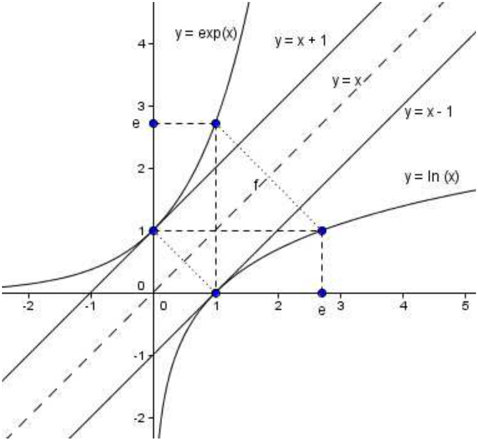

FIGURE – *Courbe représentative de la fonction* ln

La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$. On peut donc déduire une relation fonctionnelle pour la fonction $\ln$ à partir de celle existant pour la fonction $\exp$:
pour tout réels x et y, $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$
donc $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x+y)) = x+y$;
si on pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$, soit $x = \ln a$ et $y = \ln b$ on obtient :

Théorème

Quels que soient les réels a et b strictement positifs :

. . . .

La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$. On peut donc déduire une relation fonctionnelle pour la fonction $\ln$ à partir de celle existant pour la fonction $\exp$:
pour tout réels x et y, $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$
donc $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x+y)) = x+y$;
si on pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$, soit $x = \ln a$ et $y = \ln b$ on obtient :

Théorème

Quels que soient les réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

Remarque

Si $a = b$, la relation fonctionnelle nous donne : $\ln(a^2) = 2\ln a$.

On peut alors en déduire : $\ln x = \ln((\sqrt{x})^2) = 2\ln(\sqrt{x})$,

soit $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$.

Propriétés

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

....

....

Propriétés

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration

- La deuxième propriété a déjà été prouvée.

Démonstration

- La deuxième propriété a déjà été prouvée.

- pour la première propriété, on utilise la relation fonctionnelle :

$$\ln \frac{a}{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

- La deuxième propriété a déjà été prouvée.

- pour la première propriété, on utilise la relation fonctionnelle :

$$\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b.$$

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ;
nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : ....

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit . . . .

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\ln(a^k) = k \ln a$.

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\ln(a^k) = k \ln a$.
Alors, ...
....
....

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\ln(a^k) = k \ln a$.
Alors, $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a$ d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1) \ln a$ et P_{k+1} est vraie.

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\ln(a^k) = k \ln a$.
Alors, $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a$
d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1) \ln a$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : ....

Démonstration

pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n \ln a$ " ;
nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\ln(a^k) = k \ln a$.
Alors, $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a$
d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1) \ln a$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\ln(a^n) = \ln \frac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\ln(a^n) = \ln\frac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\ln(a^{-n}) = (-n)\ln a$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\ln(a^n) = \ln \frac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\ln(a^{-n}) = (-n)\ln a$

On en déduit que : $\ln(a^n) = n \ln a$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration

- On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$, donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction ln).

Démonstration

- On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$, donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction ln).

On en déduit que pour tout x strictement positif $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x}$ et donc $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Démonstration

- On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$, donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction ln).

On en déduit que pour tout x strictement positif $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x}$ et donc $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Alors, pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$,

c'est-à-dire : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Démonstration

- On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$, donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction ln).

On en déduit que pour tout x strictement positif $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x}$ et donc $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Alors, pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$,

c'est-à-dire : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

De plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc par application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Remarque

On pouvait aussi écrire $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\exp(X)} = \dfrac{1}{\frac{\exp(X)}{X}}$,

et appliquer les théorèmes sur la composition et l'inverse de limites.

Démonstration

- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$ est

....

Démonstration

- $$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$$ est

le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ en 1.

Démonstration

- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$ est

le taux d'accroissement de la fonction ln en 1.

Sa limite quand x tend vers 0 est le ....
....

Démonstration

- $$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$$ est

le taux d'accroissement de la fonction ln en 1.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction ln en 1 qui est 1.

Démonstration

- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$ est

le taux d'accroissement de la fonction ln en 1.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction ln en 1 qui est 1.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \ldots$

Démonstration

- $$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$$ est

le taux d'accroissement de la fonction ln en 1.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction ln en 1 qui est 1.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = 1.$

On montre que :

Propriété

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)'(x) = \ldots\ldots$$

On montre que :

Propriété

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On montre que :

Propriété

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Par exemple, on obtient pour tout $x > -\frac{b}{a}$:

$$(\ln(ax+b))' = \ldots\ldots$$

On montre que :

Propriété

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Par exemple, on obtient pour tout $x > -\frac{b}{a}$:

$$(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$$

Remarque

u étant strictement positive, le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u'.

Remarque
u étant strictement positive, le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u'.

Cette dérivée satisfait à la formule générale :

$$(f(u(x))' = u'(x) \times f'(u(x))$$