Cours de terminale S
Fonctions de référence
La fonction exponentielle

V. B. J. D. S. B.

Lycée des EK

7 octobre 2019

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

Définition

Cette fonction est appelée . . . .

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle.**

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle.**

On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle.**

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle.**

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel : . . . .

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle.**

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle.**

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) =$..................................
....

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction
....

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$;

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1;$ on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = \dots$

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) =(\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1;$ on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,
soit $\exp(x)\exp(-x) = \ldots$,

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,
soit $\exp(x)\exp(-x) = 1$,

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) =(\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1;$ on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,
soit $\exp(x)\exp(-x) = 1$, d'où on conclut que ....

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et
$\phi'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' =$
$\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$
Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.
Or $\phi(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,
soit $\exp(x)\exp(-x) = 1$, d'où on conclut que $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration du théorème

Démonstration du théorème

L'existence d'une telle fonction est admise.
On démontre l'unicité :

Démonstration du théorème

L'existence d'une telle fonction est admise.
On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut définir pour tout x réel une fonction u par
$u(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(x)}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.

Démonstration du théorème

L'existence d'une telle fonction est admise.
On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut définir pour tout x réel une fonction u par
$u(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(x)}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.
Alors $(u(x))' =$.................................

Démonstration du théorème

L'existence d'une telle fonction est admise.
On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut définir pour tout x réel une fonction u par
$u(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(x)}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.
Alors $(u(x))' = \dfrac{g'(x)\exp(x) - g(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2} = \dfrac{g(x)\exp(x) - g(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$

Démonstration du théorème

L'existence d'une telle fonction est admise.
On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut définir pour tout x réel une fonction u par
$u(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(x)}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.
Alors $(u(x))' = \dfrac{g'(x)\exp(x) - g(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2} = \dfrac{g(x)\exp(x) - g(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$
La fonction u de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $u(0) = 1$, on en déduit que $u(x) = 1$ pour tout x réel.
Ceci signifie que $g(x) = \exp(x)$ pour tout x réel.

La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.

La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.
Démonstration : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$; s'il existe un réel x tel que $\exp(x) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ...
....
....

La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.

Démonstration : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$; s'il existe un réel x tel que $\exp(x) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe a réel tel que $\exp(a) = 0$. Or ceci est impossible puisque pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

Théorème

Quels que soient les réels a et b :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Théorème

Quels que soient les réels a et b :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,
$g(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)}$;

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$g(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)}$;

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \frac{\exp'(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$= \frac{\exp(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp(x)}{(\exp(x))^2}$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,
$g(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)}$;
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \frac{\exp'(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$= \frac{\exp(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp(x)}{(\exp(x))^2}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,
soit $g(x) = g(0) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a)$ pour tout x réel.

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,
$g(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)}$;
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$g'(x) = \frac{\exp'(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$= \frac{\exp(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp(x)}{(\exp(x))^2}$$
donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,
soit $g(x) = g(0) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a)$ pour tout x réel.
En particulier pour $x = b$, on obtient
$$g(b) = \frac{\exp(a+b)}{\exp(b)} = \exp(a)$$
d'où on déduit que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Remarque
Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$$\exp(x) = \exp(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}) = \exp(\tfrac{x}{2})\exp(\tfrac{x}{2})) = \left(\exp(\tfrac{x}{2})\right)^2.$$

Puisqu'un carré est positif et que $\exp(x) \neq 0$, on montre à nouveau que $\exp(x) > 0$ pour tout x.

Propriétés

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriétés

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(-b)=\frac{1}{\exp(b)}$$

$$\exp(na)=(\exp a)^n$$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a-b)+b) = \exp(a-b)\exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- l'égalité précédente avec $a = 0$ donne

$\exp(-b) = \dfrac{\exp(0)}{\exp(b)} = \dfrac{1}{\exp(b)}$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
$\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$
d'après l'hypothèse de récurrence,

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
$\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$
d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$ et P_{k+1} est vraie.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
$\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$
d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,
$\exp(na) = \dots\dots\dots$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

On en déduit que : $\exp(na) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

On en déduit que : $\exp(na) = \dfrac{1}{(\exp(a))^{-n}} = (\exp a)^n$.

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

. . . .

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = \mathrm{e}.$$

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = \mathrm{e}.$$

$\mathrm{e} \simeq 2,718\ldots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π.

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = \text{e}.$$

$\text{e} \simeq 2,718\ldots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π.

On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$\exp(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = \mathrm{e}.$$

$\mathrm{e} \simeq 2,718\ldots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π.

On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n.$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut donc écrire : $e^0 = \ldots$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

On peut donc écrire : $\mathrm{e}^0 = 1$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut donc écrire : $e^0 = 1$ et $(e^x)' = \ldots$.

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

On peut donc écrire : $\mathrm{e}^0 = 1$ et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \qquad e^{na} = (e^a)^n$$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{-b} = \frac{1}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$$

De plus, quels que soient les réels a, b : $\mathrm{e}^{ab} = (\mathrm{e}^a)^b$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{-b} = \frac{1}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$$

De plus, quels que soient les réels a, b : $\mathrm{e}^{ab} = (\mathrm{e}^a)^b$

Par exemple : $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^x$ donc $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$ et en particulier, $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Théorème

La fonction exponentielle est ....

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par définition, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$ pour tout x réel ; puisque sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on conclut que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire

. . . .

Corollaire

$$a < b \iff \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \qquad \text{et} \qquad a = b \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$$

Corollaire

$$a < b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \qquad \text{et} \qquad a = b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$$

En particulier : si $x < 0$ alors $\mathrm{e}^x < 1$ et si $x > 0$ alors $\mathrm{e}^x > 1$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$$

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$
d'où : $e^x > x$.

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$
d'où : $e^x > x$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$
d'où : $e^x > x$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent).

On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.

La courbe passe par les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1; \mathrm{e})$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\mathrm{e}^0 = 1$.

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, la courbe représentative de la fonction exponentielle admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$, soit l'axe des abscisses.

Fonction exponentielle

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x) = \exp x$	
$f(x) = \exp x$	

Fonction exponentielle

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \exp x$	$+$
$f(x) = \exp x$	

Fonction exponentielle

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = \exp x$		$+$	
$f(x) = \exp x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fonction exponentielle

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = \exp x$		$+$	
$f(x) = \exp x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

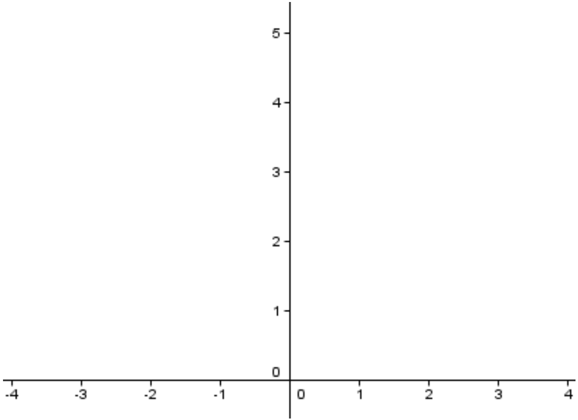

FIGURE – *Courbe représentative de la fonction exponentielle*

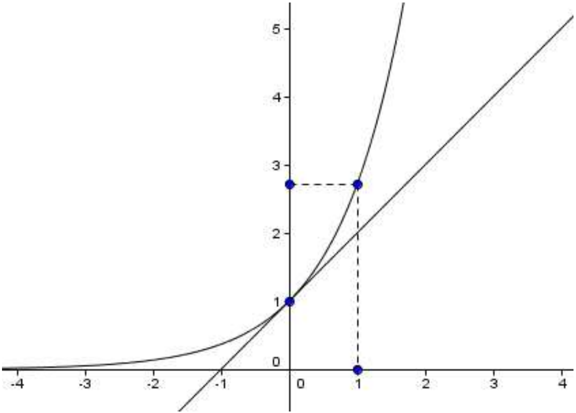

FIGURE – *Courbe représentative de la fonction exponentielle*

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \ldots\ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = \dots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par
$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par
$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
$g'(x) = e^x - x$ et d'après la démonstration précédente,
$g'(x) > 0$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par
$g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$.
$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente,
$g'(x) > 0$.
La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente, $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g(x) > 0$, soit $\mathrm{e}^x > \frac{x^2}{2}$

d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par
$g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{x^2}{2}$.
$g'(x)=\mathrm{e}^x-x$ et d'après la démonstration précédente,
$g'(x)>0$.
La fonction g est donc croissante et de plus $g(0)=1$.
On en déduit que, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g(x)>0$, soit $\mathrm{e}^x>\frac{x^2}{2}$
d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}>\dfrac{x}{2}$.
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ donc, par comparaison,

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par
$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
$g'(x) = e^x - x$ et d'après la démonstration précédente,
$g'(x) > 0$.
La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g(x) > 0$, soit $e^x > \frac{x^2}{2}$
d'où : $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par
$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
$g'(x) = e^x - x$ et d'après la démonstration précédente,
$g'(x) > 0$.
La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g(x) > 0$, soit $e^x > \frac{x^2}{2}$
d'où : $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\dfrac{X}{e^X} = 0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent.)

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \dots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le ....

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le ....

....

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x} = 1.$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k\exp(-kx)$$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k\exp(-kx)$$

Plus généralement, on montre que :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(\mathrm{e}^u)' = \ldots$$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k \exp(-kx)$$

Plus généralement, on montre que :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u$$

Remarque

e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Remarque

e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : $(\exp(-kx^2))' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : $(\exp(-kx^2))' = -2kx\exp(-kx^2)$