Terminale S (2016-2017)
Géométrie dans l'espace

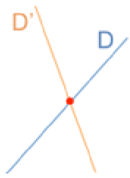
1 Positions relatives de droites et de plans

1.1 Positions relatives de deux droites

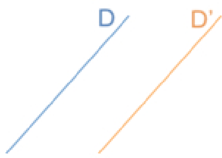
Deux droites de l'espace sont :

- soit . . . . elles sont alors

  soit . . . .

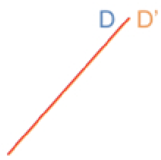


  soit . . . . et dans ce cas elles sont

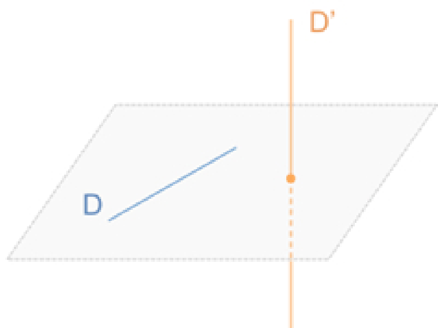


  . . . .

  ou . . . .

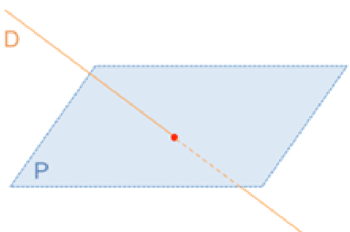


- soit . . . .



1.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

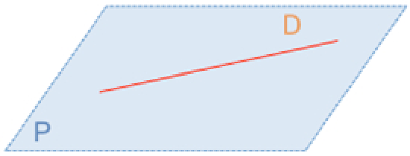
Une droite et un plan de l'espace sont :
• soit . . . . , et l'intersection est alors un . . . . ;



• soit . . . . et dans ce cas :

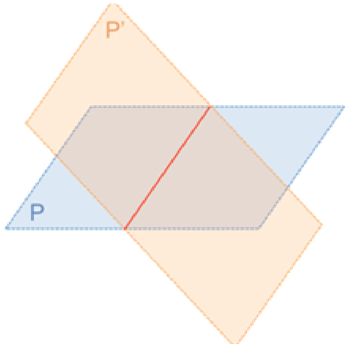
la droite est . . . .

ou la droite est . . . .



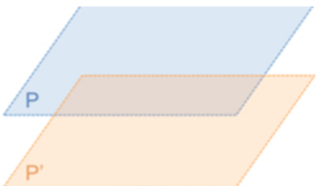
1.3 Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont :



• soit . . . . , et dans ce cas l'intersection est une droite ;

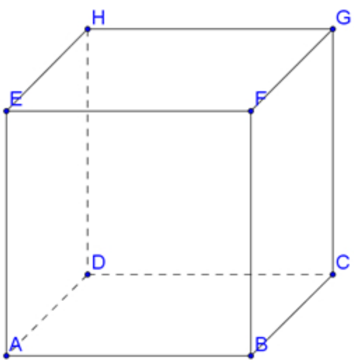
• soit . . . . , et dans ce cas ils sont



. . . .

. . . .

Exemple du cube



2 Parallélisme

2.1 Entre droites

- Deux droites parallèles à une même troisième sont ....
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une ....

2.2 Entre plans

- Deux plans parallèles à un même troisième sont ....
- Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un second plan, alors les deux plans sont ....
- Un plan coupe deux plans parallèles selon ....

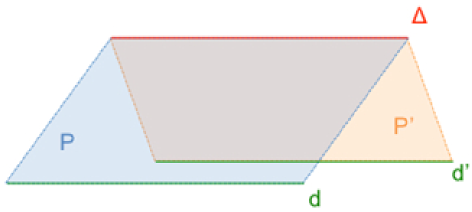
Remarque
Toutes les propriétés de géométrie plane ....

2.3 Entre droites et plans

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'un est ....
- Si une droite est parallèle à une seconde, alors elle est parallèle ....
- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle ....
- **Théorème du toit (preuve dans la suite du cours)**

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :
- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors ....
....

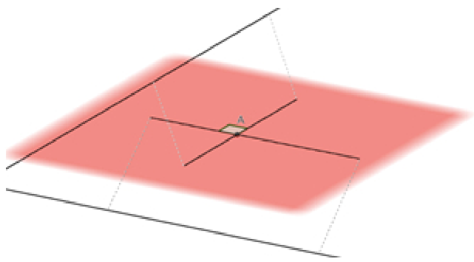


3 Orthogonalité

3.1 Orthogonalité de droites

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont ....

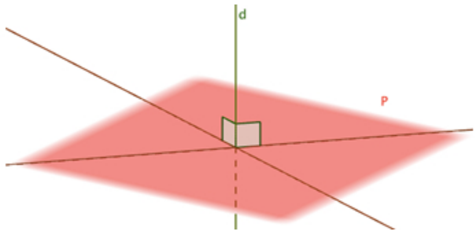


Propriété
Si deux droites sont parallèles, alors tout droite orthogonale à l'une est ....

3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à . . . .



Propriétés

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à . . . .
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors . . . .
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont . . . .
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est . . . .
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont . . . .

4 Géométrie vectorielle dans l'espace

4.1 Notion de vecteur dans l'espace

Définition

Un vecteur de l'espace est défini par . . . .

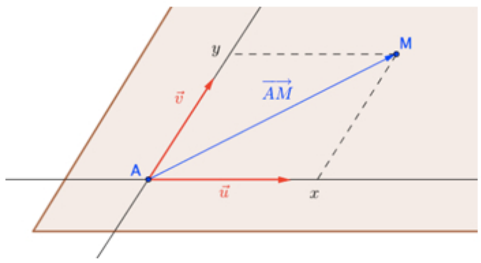
Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane ; relation de Chasles, colinéarité, etc . . . restent valides.

4.2 Caractérisation d'un plan

Définition

Soient A un point de l'espace, et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec x et y des réels, est . . . .



Remarques

– Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un . . . .
– Un plan est ainsi totalement déterminé par . . . .
– Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont . . . . pour tous points A et B.

4.3 Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que des vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Propriétés

– Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

– Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité .... implique ....

Remarques

– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit en fait de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que .... pour montrer la coplanarité des trois vecteurs.

– Deux vecteurs sont ....

Théorème

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si ....
....

Propriété et définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
$(x; y; z)$ sont les .... dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

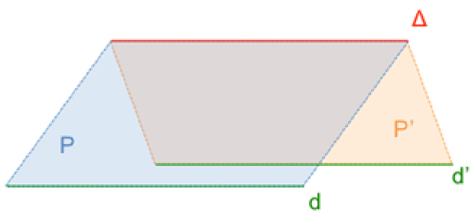
4.4 Application : démonstration du théorème du toit

Rappel du théorème

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :

- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors ....
....



Démonstration

d et d' sont parallèles : on note $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et de d', et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
On veut montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (et donc par suite, d et d' seront bien parallèles à Δ).

Notons $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P, et $(\vec{u}, \vec{v'})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P'. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont ....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont .... Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que ....

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont .... Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que ....

Ainsi, ...

Donc ....

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément ....

Ainsi $\vec{w}=$......, et donc ....

5 Repérage dans l'espace

5.1 Repères de l'espace

Définition

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x est l'.............. du point M, y est l'.............. du point M et z est la ....

On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

5.2 Colinéarité et alignement dans l'espace

Théorèmes

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que ...., c'est-à-dire tel que $\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$
- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ....
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que ....

5.3 Milieu, distance

Théorèmes

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : ....

Dans un repère orthonormé :

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est $||\vec{u}|| =$ ....
- La distance AB est donnée par : $AB =$ ....

6 Représentations paramétriques

6.1 Représentations paramétriques d'une droite

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}$ $(a; b; c)$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x & = & \dots\dots\dots \\ y & = & \dots\dots\dots \\ z & = & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Preuve

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ $(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\vec{u}$ $(a; b; c)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que ...., ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Définition

$\left\{\begin{array}{lll} x & = & at + x_A \\ y & = & bt + y_A \\ z & = & ct + z_A \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, est appelé . . . .

Remarques

– Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend . . . .
– Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de . . . .

6.2 Représentations paramétriques d'un plan

Théorème

$M(x;y;z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}\ (a;b;c)$ et $\vec{v}\ (a';b';c')$ si et seulement si il existe un couple de réels t et t' tels que :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \dots\dots\dots\dots\dots \\ y & = & \dots\dots\dots\dots\dots \\ z & = & \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Définition

$\left\{\begin{array}{lll} x & = & at + a't' + x_A \\ y & = & bt + b't' + y_A \\ z & = & ct + c't' + z_A \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$, est appelé . . . .

Remarque

Il existe plusieurs représentations paramétriques pour un même plan : chaque représentation dépend . . . .