

Les nombres complexes

1 Les nombres complexes

1.1 Définition

Il existe un ensemble, noté \mathbb{C} , d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- \mathbb{C} contient l'ensemble \mathbb{R} des réels ;
- \mathbb{C} contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble \mathbb{R} ;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z .

1.2 Vocabulaire

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

1.3 Conséquences

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\mathcal{I}m(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que $\mathcal{R}e(z) = 0$

1.4 Propriétés

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

- En particulier :

$$a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$$

2 Opérations sur les complexes

2.1 Calculs

Grâce aux propriétés de l'ensemble \mathbb{C} , on calcule dans \mathbb{C} comme dans \mathbb{R} , en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.
- produit : $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.
- identités remarquables : elles restent valables dans \mathbb{R} , en particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

2.2 Conjugué

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note \bar{z} .

Exemples :

Si $z = 2 + 6i$, alors $\bar{z} = 2 - 6i$; si $z = 4$ alors $\bar{z} = 4$; si $z = -2i$ alors $\bar{z} = 2i$.

Conséquence : Si $z = a + bi$, alors $z + \bar{z} = 2a$ et $z - \bar{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Il en résulte que :

- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à " $z = \bar{z}$ ".

- "Le nombre complexe z est imaginaire pur" équivaut à " $z + \bar{z} = 0$ ".

Propriétés

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \text{pour tout naturel } n.$$

$$\text{si } z' \neq 0 : \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

Remarque

$$\overline{\bar{z}} = z \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$$

3 Equation du second degré à coefficients réels

Théorème

Dans \mathbb{C} , l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels, a toujours des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle : $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec } z_2 = \bar{z}_1.$$

Conséquence

Dans \mathbb{C} , le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise toujours sous la forme : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Démonstration

On écrit le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans \mathbb{C} l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est résoudre l'équation

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

- si $\Delta > 0$ ou si $\Delta = 0$, on sait que l'équation a deux solutions dans \mathbb{R} et deux seulement (distinctes ou égales). Elle a donc deux solutions complexes et deux seulement puisque \mathbb{R} est inclus dans \mathbb{C} .

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Ainsi l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec} \quad z_2 = \overline{z_1}.$$

Exemple :

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 = (48i)^2$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{12 - 48i}{8} = \frac{3}{2} - 6i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{12 + 48i}{8} = \frac{3}{2} + 6i$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} - 6i; \frac{3}{2} + 6i \right\}$$

4 Représentation géométrique d'un nombre complexe

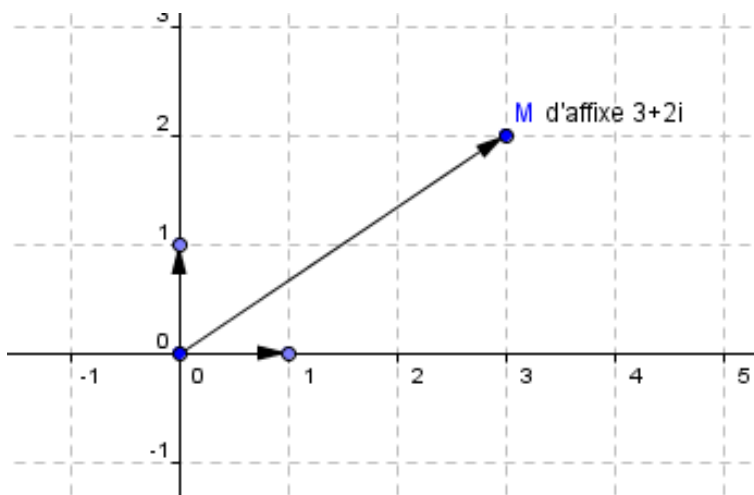
4.1 Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + bi$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}(a; b)$ appelés point image et vecteur image de z .

- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + bi$, appelé affixe de M et affixe de \vec{w} .

Le plan est alors appelé plan complexe.



4.2 Remarques

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires.

4.3 Propriétés

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B . Alors :

- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

On considère les vecteurs \vec{w} et \vec{w}' d'affixes respectives z et z' , et le réel λ .

- $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$.
- $\lambda \vec{w}$ a pour affixe λz .

Preuve :

Il s'agit simplement d'une autre écriture des propriétés déjà connues pour les coordonnées.

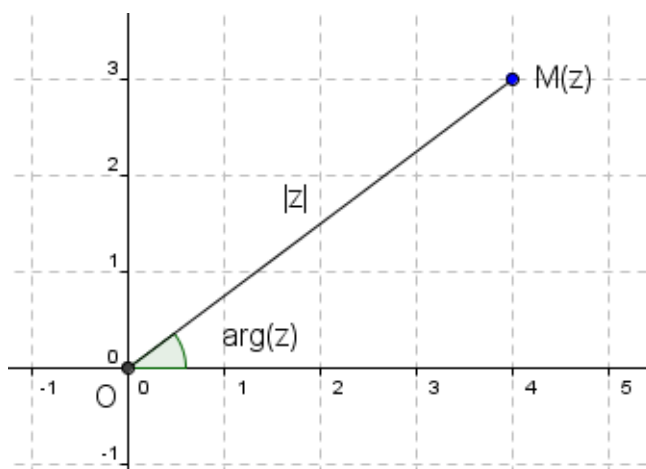
5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

5.1 Module et argument

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z , noté $|z|$, est la distance OM : $|z| = OM$.
Si z est non nul, on appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$: $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$.



Exemples

$$|i| = 1 \text{ et } \arg(i) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$|-3| = 3 \text{ et } \arg(-3) = \pi \quad (2\pi)$$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z , $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z , $|-z| = |\bar{z}| = |z|$.
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

- z est un réel, ($z \neq 0$), si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad (\pi)$.
- z est un imaginaire pur, ($z \neq 0$), si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

5.2 Forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite forme trigonométrique :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{avec} \quad r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

5.3 Passage d'une forme à l'autre

- Si la forme algébrique de z est $z = a + bi$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + bi$ avec $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.

5.4 Propriétés

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

• Produit

$$\text{Module : } |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\text{Argument : } \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$$

• Puissance

$$\text{Module : } |z^n| = |z|^n$$

$$\text{Argument : } \arg(z^n) = n \arg(z) \quad (2\pi)$$

• Inverse

$$\text{Module : } \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\text{Argument : } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

• Quotient

$$\text{Module : } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\text{Argument : } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$$

• Somme

$$\text{Inégalité triangulaire : } |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

• Géométrie

Soient A , B et C trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

$$|z_B - z_A| = AB \text{ et } \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \vec{AB}) \quad (2\pi)$$

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA} \text{ et } \arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = (\vec{CA}; \vec{CB}) \quad (2\pi)$$

Par conséquent, les points A , B et C sont alignés si et seulement si $\arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = 0 \quad (\pi)$

et les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$

6 Notation exponentielle et applications.

6.1 Notation exponentielle

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos \theta + i \sin \theta$ avec $\theta = \arg(z) \quad (2\pi)$.

On note f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

On se propose de démontrer que pour tous réels θ et θ' , $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] \\ &= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta] \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$$

$$\text{De plus, } f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, ce qui justifie cette notation exponentielle.

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Exemples

$$e^{i\pi} = -1 ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

6.2 Propriétés

Pour tout réels θ et θ' :

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \\ e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} & (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \\ \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} & \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} \end{aligned}$$

6.3 Applications en trigonométrie

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' - i \sin \theta'] \\ &= \cos \theta \cos \theta' - i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \\ &= [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'] + i[\sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta']\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta - \theta') = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cos \theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$