Les nombres complexes

1 Les nombres complexes

1.1 Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés . . . ., tels que :
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble . . . . ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que . . . . ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul . . . . ;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = \ldots\ldots$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la . . . .

1.2 Vocabulaire

- On dit que le réel a est la . . . . .de z et on la note $a = \ldots\ldots\ldots$
- On dit que b est la . . . . .de z et on la note $b = \ldots\ldots\ldots$
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé . . . .

1.3 Conséquences

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que . . . .
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que . . . .

1.4 Propriétés

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont . . . . :

$$a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- En particulier :

$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow a = \ldots \text{ et } b = \ldots$$

2 Opérations sur les complexes

2.1 Calculs

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$..
- produit : $zz' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.2 Conjugué

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe ....   On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = ...$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = \ldots$; si $z = -2i$ alors $\overline{z} = \ldots$.

Conséquence : Si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = \ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = \ldots\ldots\ldots$$

Il en résulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \ldots$ ".
- "Le nombre complexe z est imaginaire pur" équivaut à "$z + \overline{z} = \ldots$ ".

Propriétés
$\overline{z + z'} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\overline{zz'} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\overline{z^n} = \ldots\ldots$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \ldots\ldots$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \ldots\ldots$

Remarque
$\overline{\overline{z}} = \ldots$ $\qquad$ $z\overline{z} = \ldots\ldots\ldots$

3 Equation du second degré à coefficients réels

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels, a toujours des solutions.   On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.   • si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle : $z_1 = z_2 = \ldots\ldots$ • si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ et $z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ avec $z_2 = \ldots$

Conséquence
Dans $\mathbb{C}$, le trinôme az^2+bz+c se factorise toujours sous la forme : $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

Démonstration
On écrit le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2 + bz + c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est résoudre l'équation

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

• si $\Delta > 0$ ou si $\Delta = 0$, on sait que l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ et deux seulement (distinctes ou égales). Elle a donc deux solutions complexes et deux seulement puisque $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

• si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a .... Donc :

....

Ainsi l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{avec } z_2 = \overline{z_1}.$$

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 Représentation géométrique d'un nombre complexe

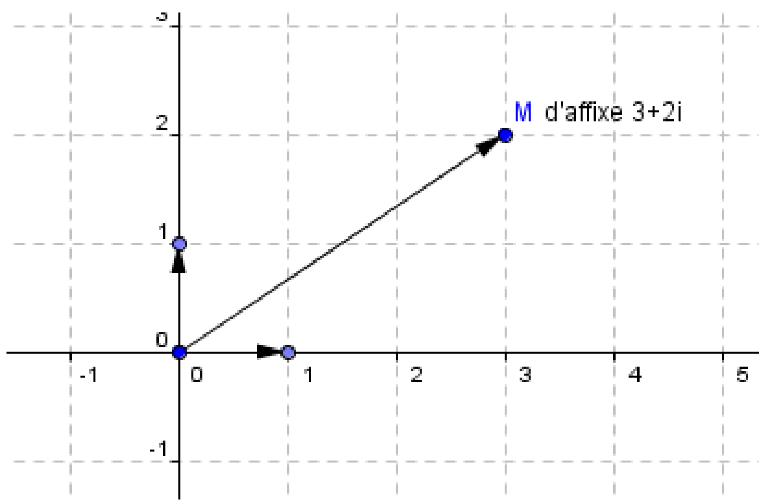
4.1 Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

• à tout complexe $z = a + bi$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\ (a; b)$ appelés .... et .... de z.

• à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}\ (a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + bi$, appelé .... et ....

Le plan est alors appelé plan complexe.



4.2 Remarques

- Le point image d'un réel appartient à l' .... Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe ....
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l' .... Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des ....

4.3 Propriétés

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe ....
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe ....

On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe ....
- $\lambda \vec{w}$ a pour affixe ....

Preuve :
Il s'agit simplement d'une autre écriture des propriétés déjà connues pour les coordonnées.

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

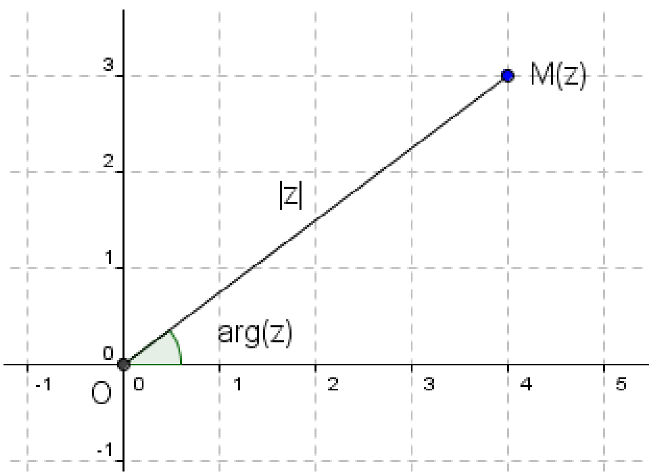
5.1 Module et argument

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est ....
Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de

....



Exemples
$|i| = \dots$ et $\arg(i) = \dots \quad (2\pi)$

$|-3| = \ldots$ et $\arg(-3) = \ldots \quad (2\pi)$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\arg(\overline{z}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- z est un réel, $(z \neq 0)$, si et seulement si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- z est un imaginaire pur, $(z \neq 0)$, si et seulement si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5.2 Forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{avec} \qquad r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

5.3 Passage d'une forme à l'autre

- Si la forme algébrique de z est $z = a + bi$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = \ldots\ldots\ldots$ et θ tel que $\cos\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\sin\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + bi$ avec $a = \ldots\ldots\ldots$ et $b = \ldots\ldots\ldots$

5.4 Propriétés

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

Module : $|z \times z'| = \ldots\ldots\ldots\ldots$ Argument : $\arg(zz') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\pi)$

- Puissance

Module : $|z^n| = \ldots$ pour $n \in \mathbb{Z}$ Argument : $\arg(z^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\pi)$

- Inverse

Module : $\left|\frac{1}{z}\right| = \ldots$ Argument : $\arg(\frac{1}{z}) = \ldots\ldots\ldots \quad (2\pi)$

- Quotient

Module : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \ldots$ Argument : $\arg(\frac{z}{z'}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\pi)$

- Somme

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$

- Géométrie

Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

$$|z_B - z_A| = AB \text{ et } arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi)$$

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA} \text{ et } arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \quad (2\pi)$$

Par conséquent, les points A, B et C sont alignés si et seulement si ....

et les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si ....

6 Notation exponentielle et applications.

6.1 Notation exponentielle

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta = \arg(z)\ (2\pi)$.

On note f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
On se propose de démontrer que pour tous réels θ et θ', $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

$f(\theta)\times f(\theta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Soit : $f(\theta)\times f(\theta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

De plus, $f(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser .... L'égalité $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ démontrée s'écrit

alors ...., ce qui justifie cette notation exponentielle.

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $\mathrm{e}^{i\theta}$ avec :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemples
$\mathrm{e}^{i\pi} = \ldots$; $\quad \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \ldots$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite .... :

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

6.2 Propriétés

Pour tout réels θ et θ' :

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{e}^{i\theta}\times\mathrm{e}^{i\theta'} = \ldots\ldots\ldots \qquad \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \ldots\ldots\ldots$$

6.3 Applications en trigonométrie

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'}$ s'écrit :

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(\theta - \theta') = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ et $\sin(\theta - \theta') = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Autre exemple :
$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(2\theta) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ et $\sin(2\theta) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$