

1 Les ensembles de nombres

1.1 L'ensemble $\mathbb{N}$

C'est l'ensemble des **entiers naturels**.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$$

On dit que "5 est un **élément** de $\mathbb{N}$ ", ou que "5 appartient à $\mathbb{N}$ " et on note : $5 \in \mathbb{N}$.

Les nombres premiers constituent un **sous-ensemble** de l'ensemble des entiers naturels.

1.2 L'ensemble $\mathbb{Z}$

C'est l'ensemble des **entiers relatifs**.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Tous les entiers naturels appartiennent à $\mathbb{Z}$. On dit que "l'ensemble $\mathbb{N}$ est **inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ", ou que " $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ " et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Tous les nombres entiers strictement négatifs appartiennent à $\mathbb{Z}$ mais n'appartiennent pas à $\mathbb{N}$. On dit que "l'ensemble des entiers strictement négatifs est le **complémentaire** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ ".

1.3 L'ensemble $\mathbb{D}$

C'est l'ensemble des **décimaux**.

Ces nombres peuvent s'écrire sous l'une des trois formes suivantes :

1. fractionnaire : $d = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exemple :

$$d = \frac{541233}{10^3}$$

2. décimale :

$$d = 541,233$$

3. scientifique : $d = a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$ et p entier relatif.

Exemple :

$$d = 5,41233 \times 10^2$$

(voir l'utilisation de la calculatrice)

Pour trouver l'ordre de grandeur de d , à partir de l'écriture scientifique, on arrondit le nombre a à l'entier le plus proche et on le multiplie par 10^p .

1.4 L'ensemble $\mathbb{Q}$

C'est l'ensemble des **rationnels**.

Ces nombres peuvent s'écrire comme le quotient d'un entier relatif par un entier naturel non nul :

$$q = \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \text{ et } b \neq 0.$$

1.5 L'ensemble $\mathbb{R}$

C'est l'ensemble des **réels**.

Si D une droite graduée de repère (O, I) , à tout point M de D , on associe un nombre x appelé abscisse de M , défini de la manière suivante :

$x = OM$ lorsque M appartient à la demi-droite $[OI)$.

$x = -OM$ lorsque M n'appartient pas à la demi-droite $[OI)$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble de ces nombres.

Il contient l'ensemble des rationnels : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Le complémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des irrationnels.

Les irrationnels sont des nombres comme par exemple $\sqrt{2}$, $\cos(37^\circ)$, π ...

Ecriture d'un réel non décimal

1. Exemples :

(a) nombres rationnels

$$\frac{40}{33} = 1,2121212121... \quad \frac{11}{6} = 1,833333...$$

(b) nombres irrationnels

$$\sqrt{2} = 1,414213562... \quad \pi = 3,14159...$$

Dans les deux cas, le nombre de décimales est infini mais pour les nombres rationnels, la suite des décimales peut être connue.

2. Troncature et arrondi :

exemple si $x \simeq 1,3726$

Troncature de x	Arrondi de x
à l'unité : $x \simeq 1$	à 1 près : $x \simeq 1$
au dixième : $x \simeq 1,3$	à 0,1 près : $x \simeq 1,4$
au centième : $x \simeq 1,37$	à 0,01 près : $x \simeq 1,37$

3. Valeurs approchées par défaut ou par excès ; encadrement.

1.6 Propriété

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2 Un peu de logique

2.1 Propositions

" a appartient à $\mathbb{N}$ ", noté $a \in \mathbb{N}$, est une **proposition** notée **P**.

Sa **négation**, notée **non P**, est " a n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ", noté $a \notin \mathbb{N}$.

Une proposition peut prendre l'une ou l'autre des deux *valeurs logiques* **vraie** ou **fausse**.

Une proposition et sa négation prennent des valeurs logiques différentes.

Par exemple " $6 \in \mathbb{N}$ " est vraie, sa négation " $6 \notin \mathbb{N}$ " est fausse.

" $-6 \in \mathbb{N}$ " est fausse, sa négation " $-6 \notin \mathbb{N}$ " est vraie.

La **conjonction** de deux propositions **P** et **Q** est la proposition notée **P et Q** qui est vraie uniquement si **P** et **Q** sont vraies.

La **disjonction** de deux propositions **P** et **Q** est la proposition notée **P ou Q** qui est fausse uniquement si **P** et **Q** sont fausses. Par exemple, la proposition " $6 \in \mathbb{N}$ ou $-6 \in \mathbb{N}$ " est vraie.

2.2 Propositions conditionnelles

"si **P**, alors **Q**" est une **proposition conditionnelle**.

P est l'hypothèse, **Q** est la conclusion. Par exemple : si $a \in \mathbb{N}$, alors $a \in \mathbb{Z}$.

C'est une **implication** que l'on peut noter : $a \in \mathbb{N} \implies a \in \mathbb{Z}$

Une implication peut être vraie ou fausse. Ici elle est vraie car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Si une implication est vraie et si **P** est vraie, on peut en déduire que **Q** est vraie.

$5 \in \mathbb{N}$, donc $5 \in \mathbb{Z}$.

Supposons qu'une proposition conditionnelle "si **P**, alors **Q**" est vraie, on définit :

- la réciproque : "si **Q**, alors **P**" qui peut être vraie ou fausse
- la contraposée : "si **non Q**, alors **non P**" qui est vraie
- la négation : "**P** et **non Q**" qui est fausse

Exemple : la proposition "si $x = 5$, alors $x^2 = 25$ " est vraie,

sa réciproque "si $x^2 = 25$, alors $x = 5$ " est fausse (x peut être égal à -5),

sa contraposée "si $x^2 \neq 25$, alors $x \neq 5$ " est vraie,

sa négation " $x = 5$ et $x^2 \neq 25$ " est fausse.

Attention : "je suis un poisson donc je vis dans l'eau" est une proposition vraie.

Pourtant je ne suis pas un poisson.

Preuve : on utilise la contraposée "si je ne vis pas dans l'eau, alors je ne suis pas un poisson" qui est vraie et puisque je ne vis pas dans l'eau . . .

3 Ordre

3.1 Définition

Si a et b sont deux réels quelconques, nous avons les équivalences suivantes :

$$a \leq b \iff a - b \leq 0$$

$$a < b \iff a - b < 0$$

$$a \geq b \iff a - b \geq 0$$

$$a > b \iff a - b > 0$$

3.2 Comparaison

Pour comparer deux nombres a et b , la première étude doit porter sur le signe de a et b . En effet, s'il sont de signes contraires, ou si l'un des deux est nul, la comparaison est terminée.

Nous nous plaçons donc dans le cas où a et b sont de même signe et non nuls.

3.2.1 Première méthode

Pour comparer deux nombres, nous étudions le signe de leur différence.

Par exemple, pour comparer $a = x^2$ et $b = 2x - 1$ où x est un réel quelconque, on calcule la différence, soit :

$$a - b = x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

On sait que $(x - 1)^2 \geq 0$ pour tout réel x puisqu'un carré est toujours positif.

De plus $(x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$.

Avec la définition nous pouvons donc en déduire que $a = b$ si $x = 1$ et $a > b$ pour tout $x \neq 1$.

3.2.2 Deuxième méthode

Pour comparer deux nombres, nous comparons leur quotient avec 1.

En effet, puisque a et b sont de même signe, nous avons les équivalences suivantes :

$$a \leq b \iff \frac{a}{b} \leq 1$$

$$a < b \iff \frac{a}{b} < 1$$

$$a \geq b \iff \frac{a}{b} \geq 1$$

$$a > b \iff \frac{a}{b} > 1$$

Par exemple, pour comparer $a = \frac{x+2}{x+1}$ et $b = \frac{x+1}{x}$ où x est un réel strictement positif, on calcule le quotient, soit :

$$\frac{a}{b} = \frac{x+2}{x+1} \times \frac{x}{x+1} = \frac{(x+2)x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

Le numérateur est strictement inférieur au dénominateur donc le quotient est strictement inférieur à 1. Nous pouvons en déduire $a < b$.

3.2.3 Troisième méthode

Dans certains cas il peut être intéressant de transformer l'écriture des nombres avant d'utiliser l'une des deux méthodes précédentes.

Par exemple, pour comparer $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \sqrt{xy}$ où x et y sont deux réels strictement positifs, on commence par élever a et b au carré :

$$a^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}, \quad b^2 = xy$$

Nous calculons maintenant la différence :

$$a^2 - b^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - \frac{4xy}{4} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \frac{(x-y)^2}{4}$$

Le dernier quotient est positif donc $a = b$ si $x = y$ et $a > b$ pour tout $x \neq y$.

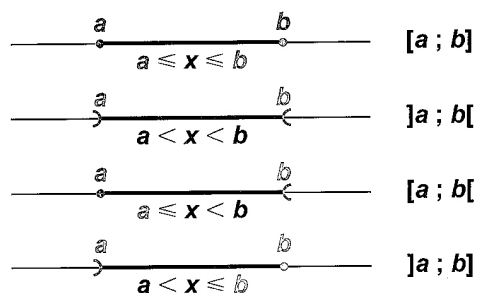
4 Intervalles

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se représente par l'ensemble des points d'une droite munie d'un repère.

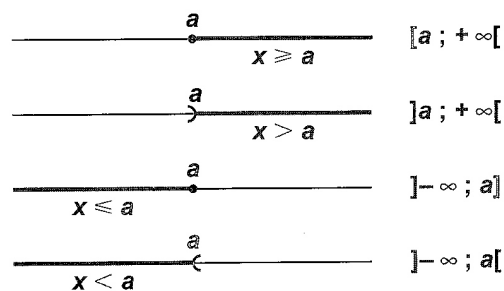
Certaines parties de $\mathbb{R}$ sont appelées **intervalles**, ils sont définis ci-dessous par des inégalités ou des représentations graphiques :

4.1 Définition

Intervalles bornés



Intervalles non bornés



Remarque :

- l'ensemble des réels peut se noter : $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$;
- l'ensemble vide ne contient aucun élément et on le note $\emptyset$;
- un ensemble contenant un seul élément a se note $\{a\}$.

4.2 Intersection et réunion

On considère deux intervalles de $\mathbb{R}$ notés I et J ;

L'**intersection** des intervalles I et J est l'ensemble des réels qui sont éléments de I et de J .

si $x \in I$ et $x \in J$, alors $x \in I \cap J$. $\cap$ se lit "inter"

Exemple : $] - 5; 3] \cap]1; 8] =]1; 3]$

La réunion des intervalles I et J est l'ensemble des réels qui sont éléments de I **ou** de J .

si $x \in I$ ou $x \in J$, alors $x \in I \cup J$. $\cup$ se lit "union"

Exemple : $] - 5; 3] \cup]1; 8] =] - 5; 8]$

Attention : dans le cas général, la réunion de deux intervalles n'est pas un intervalle.