Spécialité NSI en terminale
TP 1

1 Recherche

1. Alan Turing.
2. La machine Enigma.
3. Stephen Kleene.
4. Alonzo Church.
5. John Von Neumann.

2 Machine de Turing

2.1 Exercice 1

On reprend la table de transition d'une machine de Turing, donnée par le tableau suivant, qui permet d'additionner 1 au nombre écrit sur le ruban :

État	Lecture	Écriture	Déplacement	État suivant
E1	blanc	blanc	gauche	E2
E2	0	0	gauche	E2
	1	1	gauche	E2
	blanc	blanc	droite	E3
E3	0	1	droite	Fin
	1	0	droite	E3
	blanc	1	droite	Fin

En s'inspirant de cet exemple, on étudie une machine de Turing qui effectue la soustraction de 1.
Le nombre initial est supposé supérieur à 1.

1. Décrire les différentes étapes pour cette soustraction :
   (a) s'il est écrit 101 sur le ruban ;
   (b) s'il est écrit 1010 sur le ruban ;
   (c) s'il est écrit 100 sur le ruban.
2. Écrire la table de transition de cette machine de Turing.
   La difficulté est de bien gérer la fin. Le nombre écrit sur le ruban ne peut pas commencer par un 0.

Le ruban se déplace vers la gauche puis la machine commence par recopier les chiffres. L'état de départ pour le nombre 101 est le suivant :

								⇓					
E1									1	0	1		

L'état final est le suivant :

							⇓						
Fin							1	0	0				

La table de transition pour la soustraction de 1 présente 5 états.

La première partie, les états E1 et E2, est identique à la table de l'exercice précédent. Il est nécessaire d'ajouter des états. Dans l'état E3, la machine écrit un 1 tant qu'elle lit un 0. Lorsqu'elle lit un 1, elle écrit un 0 et il reste à vérifier s'il y a d'autres chiffres devant. Si c'est le cas, c'est terminé, et sinon il faut remplacer le 0 par un blanc.

État	Lecture	Écriture	Déplacement	État suivant
E1	blanc	blanc	gauche	E2
E2	0			
	1			
	blanc			
E3	0			
	1			
E4	0			
	1			
	blanc			
E5	0	blanc	droite	Fin

Ecrire un programme en Python permettant de simuler cette machine.

2.2 Exercice 2

Nous reprenons un tableau du cours représentant une table de transitions. Nous notons e1 et e2 les états, S2 pour le symbole blanc, S0 et S1 ce qui est lu ou écrit, G et D les déplacements. Cet exercice est inspiré de l'article « On computable numbers » de Turing.

État	Lecture	Écriture	Déplacement	État suivant
E1	blanc	blanc	gauche	E2
E2	0	1	gauche	E2
	1	0	gauche	E2
	blanc	blanc	gauche	Fin

1. Si la machine est dans l'état E1 et qu'elle lit un blanc, cela se traduit avec la notation présentée par la séquence : e1S2S2Ge2 ; avec un point-virgule à la fin.

   La machine est dans l'état E1. Décrire entièrement le fonctionnement de la machine si le nombre lu après le blanc initial est 1101.
2. Dans l'article de Turing, ce qui s'appelle la première description standard consiste à remplacer : ei par D suivi de i fois A et Si par D suivi de i fois C. On garde le point-virgule.

   Pour la séquence e1S2S2Ge2 ;, cela donne la séquence DADCCDCCGDAA ;. Décrire la suite du résultat obtenu dans la première question.
3. Dans l'article de Turing, avec la deuxième description standard, on représente les séquences à l'aide de nombres. On remplace : A par 1, C par 2, D par 3, G par 4, R (right) par 5 et le point-virgule par 7. Décrire entièrement la séquence obtenue.
4. Ecrire des programmes en Python permettant d'obtenir les réponses aux questions précédentes.

3 Calculabilité

Processus diagonal

Nous supposons qu'il est possible d'écrire les suites décimales de tous les nombres calculables :

I1 = . . .

I2 = . . .

In = . . .

Soit In(m) le m-ième symbole de In. Soit J la suite composée des symboles J(n) = 1 - In(n). Alors J est l'un des Ik. Donc 1 - In(n) = Ik(n) et en considérant n = k, on obtient 1 = 2 Ik(k) ce qui est impossible puisque 1 est impair. Ceci prouve que l'on ne peut pas énumérer toutes les suites de symboles.

Quelle peut être l'erreur dans ce raisonnement ?