

# Mémoire de Master 2

Serge BAYS

10 juin 2011

Encadré par Jean BERTOIN

Professeur

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires

## Résumé

Ce mémoire présente l'étude d'un article récent proposé par Josh Abramson et Jim Pitman, de l'Université de Californie à Berkeley, intitulé "Concave Majorants of Random Walks and Related Poisson Processes", (arXiv :1011.3262v1, 14 nov 2010).

Cette étude reprend le texte dans son intégralité en incluant des remarques sur quelques points et en précisant les notions de base. Les résultats obtenus sont commentés où testés sur des exemples et tous les calculs nécessaires sont détaillés.

Les auteurs nous présentent une approche unifiée de la théorie du majorant concave d'une marche aléatoire à l'aide d'une transformation de la trajectoire pour une marche de longueur finie qui laisse la loi de la marche inchangée tout en fournissant une information complète sur son majorant concave.

Ceci conduit à la description d'une marche, dont la longueur aléatoire suit une loi géométrique, comme un processus ponctuel de Poisson des excursions hors de son majorant concave, ce qui permet alors de donner une description complète du majorant concave d'une marche de longueur infinie.

Dans le cas où des sous-ensembles d'accroissements peuvent avoir la même moyenne arithmétique, les auteurs étudient trois compositions emboîtées qui apparaissent naturellement lors de la construction du majorant concave.

On trouve dans la littérature une approche combinatoire produisant des résultats importants datant des années 1950 par Sparre Andersen et Spitzer. Des travaux sur le majorant concave ou le minorant convexe ont été menés entre autres par Groeneboom et Pitman pour le mouvement brownien dans les années 80, et plus récemment par Pitman pour les processus de Lévy, ou par Bertoin pour les processus de Cauchy.

## 1 Introduction

Les marches aléatoires, objets de base de l'étude, sont très présentes dans la littérature. Le livre de Spitzer [31] est une référence sur les marches aléatoires discrètes. Feller [12, 13] présente de nombreux résultats.

Soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $1 \leq j \leq n$ , où  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires échangeables.

La notion d'échangeabilité a été développée dans les années 1920 à 1930 en particulier par de Finetti. On parle aussi de dépendance symétrique. Voir [13, p. 228]. Une suite finie ou infinie  $(X_i)$  est échangeable si pour toute permutation  $\sigma$  qui ne déplace qu'un nombre fini d'indices, la loi de probabilité jointe de la suite  $(X_{\sigma(i)})$  est identique à celle de la suite  $(X_i)$ . L'exemple le plus simple est celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi mais une suite de variables aléatoires dépendantes peut aussi être échangeable.

Nous noterons **A** l'hypothèse que presque sûrement deux sous-ensembles de  $X_1, \dots, X_n$  n'ont pas la même moyenne arithmétique, et admettons pour

l'instant que **A** est satisfaite. C'est le cas par exemple si les  $X_i$  sont continues. Par contre cette hypothèse n'est pas satisfaite pour la marche aléatoire symétrique de Bernoulli.

Soit  $S^{[0,n]} := \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$ , tel que  $S^{[0,n]}$  est la marche aléatoire de longueur  $n$  avec des accroissements qui suivent les lois de  $X_1, \dots, X_n$ . Soit

$$0 < N_{n,1} < N_{n,1} + N_{n,2} < \dots < N_{n,1} + \dots + N_{n,F_n} = n$$

les instants successifs  $j$ , avec  $0 \leq j \leq n$ , tels que  $S_j = \bar{C}^{[0,n]}(j)$ , où  $\bar{C}^{[0,n]}$  est le *majorant concave* de la marche  $S^{[0,n]}$ , c'est-à-dire la plus petite fonction concave  $C$  sur  $[0, n]$  telle que  $C(j) \geq S_j$  pour  $1 \leq j \leq n$ . La variable aléatoire  $F_n$  est le *nombre de faces* du majorant concave. Si l'hypothèse **A** n'est pas satisfaite, il faut prendre plus de soin dans la définition des faces du majorant concave ; ceci sera discuté plus loin dans la Partie 6.

La  $i$ -ème face du majorant concave est une corde de

$$(N_{n,1} + \dots + N_{n,i-1}, S_{N_{n,1} + \dots + N_{n,i-1}}) \text{ à } (N_{n,1} + \dots + N_{n,i}, S_{N_{n,1} + \dots + N_{n,i}}).$$

Nous définissons les *longueur*, *accroissement* et *pente* de la  $i$ -ème face par  $N_{n,i}$ ,  $\Delta_{n,i}$  et  $\frac{\Delta_{n,i}}{N_{n,i}}$  respectivement, avec

$$\Delta_{n,i} := (S_{N_{n,1} + \dots + N_{n,i}} - S_{N_{n,1} + \dots + N_{n,i-1}}), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq F_n.$$

Dans les années 1950, E. Sparre Andersen [3] a découvert le remarquable résultat suivant : pour toutes variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  échangeables satisfaisant l'hypothèse **A**, nous avons l'égalité en loi

$$F_n \stackrel{d}{=} K_n = \sum_{j=1}^n I_j \tag{1}$$

où  $K_n$  est le nombre de cycles d'une permutation aléatoire de l'ensemble  $[n] := \{1, \dots, n\}$ , la probabilité dans l'ensemble des permutations étant équirépartie, et  $I_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  est une suite de variables aléatoires de Bernoulli avec  $\mathbb{P}(I_j = 1) = 1/j$  et  $\mathbb{P}(I_j = 0) = 1 - 1/j$  pour tout  $j$ .

Dans un premier article [2], Sparre Andersen a présenté des propriétés des variables aléatoires caractérisant l'indice du premier temps d'atteinte de  $\max(S_i)$ , l'indice du dernier temps d'atteinte de  $\min(S_i)$  et le nombre de sommes  $S_i$  strictement positives. Il travaille alors avec des variables aléatoires échangeables et en partie sous l'hypothèse **A**. Ses résultats sont à rapprocher de ceux obtenus par Chung et Feller [8] pour la marche de Bernoulli symétrique ou par Erdős et Kac [11] sur le nombre de sommes positives. Dans [3], il introduit la variable aléatoire  $H_n$  qui compte le nombre de points où la marche coïncide avec son minorant convexe sans compter les deux points extrêmes, c'est-à-dire le nombre d'excursions ou de faces moins un, dans le cas de variables aléatoires échangeables et sous l'hypothèse **A**. Il obtient un résultat pour la fonction génératrice  $H(s, t)$  et constate le lien avec le nombre de cycles d'une permutation aléatoire de  $n$  éléments noté par Feller [12, p.

257]. Dans [1] il modifie la définition de  $H_n$ , qui correspond alors exactement au nombre d'excursions, et développe de nouveaux résultats dans le cas général.

La seconde égalité dans (1) est une représentation élémentaire et bien connue de  $K_n$  valide pour de nombreuses constructions naturelles de permutations aléatoires de  $[n]$ , simultanément pour tout  $n$ , aussi bien dans la construction des records des  $X_i$  [16], que dans le Processus du Restaurant Chinois [25]. Ce processus se décrit ainsi : un restaurant vide a une infinité de tables rondes numérotées  $1, 2, \dots$  à chacune desquelles peuvent s'asseoir une infinité de clients numérotés  $1, 2, \dots$  qui arrivent un par un. Le premier client s'assoit à la table 1. Si  $n$  clients sont déjà installés et occupent  $k$  tables, le client  $n + 1$  choisit avec des probabilités égales de s'asseoir soit à gauche du client  $j$  pour  $1 \leq j \leq n$ , soit seul à la table  $k + 1$ . On définit alors la permutation  $\sigma_n$  de  $[n]$  de la manière suivante : si, après que  $n$  clients soient entrés, le client  $i$  est assis à gauche du client  $j$  alors  $\sigma_n(i) = j$  et si le client  $i$  est seul à une table alors  $\sigma_n(i) = i$ . Notons que le nombre de tables occupées lorsque  $n$  clients sont entrés est égal au nombre de cycles de  $\sigma_n$ . De plus, si  $n$  clients sont entrés, le nombre de clients assis à la première table suit une loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ ; sachant que ce nombre est  $n_1$ , le nombre de clients assis à la deuxième table suit une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n - n_1\}$ , et ainsi de suite. On construit de cette manière un processus de "stick breaking" uniforme discret, processus du partage d'un segment de longueur  $n$ , ou comment "briser un bâton" de manière aléatoire uniforme dans le cas présent. Plus précisément, pour tout entier  $n \geq 1$ , un processus de "stick breaking" uniforme discret est une suite de variables aléatoires  $L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}$  avec

- $L_{n,1}$  uniforme sur  $[n] := \{1, \dots, n\}$ .
- pour tout  $i \geq 1$ , si  $\sum_{j=1}^i L_{n,j} < n$  alors  $L_{n,i+1}$  est uniforme sur  $\left[n - \sum_{j=1}^i L_{n,j}\right]$ .
- pour tout  $i \geq 1$ , si  $\sum_{j=1}^i L_{n,j} = n$  alors on pose  $K_n = i$  et le processus se termine.

Si les variables  $M_{n,1}, \dots, M_{n,K_n}$  représentent les variables  $L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}$  rangées en ordre décroissant au sens large, alors  $M_{n,1}, \dots, M_{n,K_n}$  est la partition de  $n$  générée par le processus de "stick breaking".

L'égalité  $K_n = \sum_{j=1}^n I_j$  peut se démontrer à l'aide des fonctions génératrices, (voir [10, p. 146] ou [12, p. 257]). Une permutation  $\sigma$  de  $[n]$  est déterminée par  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ , et nous dirons que  $\sigma(j)$  est un record si  $\sigma(i) < \sigma(j)$  pour tout  $i < j$ . Soit  $I_j$  une variable aléatoire de Bernoulli, avec  $I_j = 1$  si  $\sigma(j)$  est un record et  $I_j = 0$  sinon.  $I = \sum_{j=1}^n I_j$  est donc le nombre de records.  $\mathbb{P}(I_j = 1) = 1/j$  et  $\mathbb{P}(I_j = 0) = 1 - 1/j$  pour tout  $j$  et les  $I_j$  sont clairement indépendants. La moyenne et la variance de  $I$  sont  $\mu = E(I) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$  et  $\sigma^2 = V(I) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$ . Quand  $(n \rightarrow +\infty)$ ,  $\sum_{j=1}^n I_j$  tend en loi vers la loi de Gauss de moyenne  $\mu = \log n$  et de variance

$\sigma^2 = \log n$ . La fonction génératrice de  $I_j$  est  $g_j(s) = \frac{j^{-1+s}}{j}$  et par indépendance, la fonction génératrice de  $I$  est  $g(s) = \prod_{j=1}^n g_j(s) = \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}$

Pour construire une permutation  $\sigma$  de  $[n]$ , nous choisissons de manière aléatoire uniforme  $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ . Si  $\sigma(1), \dots, \sigma(i-1)$  ont été choisis, il reste  $n-i+1$  choix possibles pour  $\sigma(i)$  et un seul de ces choix clôt un cycle. Soit  $X_i$  une variable aléatoire de Bernoulli, avec  $X_i = 1$  si un cycle est bouclé au  $i$ -ième choix et  $X_i = 0$  sinon.  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  est donc le nombre de cycles.  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{n-i+1}$  et  $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{n-i}{n-i+1}$  pour tout  $i$  et les  $X_i$  sont indépendants. On obtient pour la moyenne et la variance de  $X$  :  $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1}$  et  $\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i+1)^2}$ . La fonction génératrice de  $X_i$  est  $g_i(s) = \frac{s+n-i}{n-i+1}$  et par indépendance, la fonction génératrice de  $X$  est  $g(s) = \prod_{i=1}^n g_i(s) = \frac{(s+n-1)(s+n-2)\dots s}{n!}$

On obtient bien dans les deux cas

$$g(s) = \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)\Gamma(n+1)}$$

On peut aussi montrer que le nombre de cycles dans la décomposition en cycles disjoints d'une permutation a la même loi que le nombre de records en utilisant une bijection, la première transformation fondamentale de Foata [14], de l'ensemble des permutations dans lui-même, sachant que les bijections préservent la loi uniforme sur l'ensemble des permutations. Le principe est d'écrire chaque cycle en commençant par son plus grand élément, ce qui fixe une manière unique d'écrire chaque cycle, puis de ranger les cycles par ordre croissant de leur plus grand élément. Il est ainsi clair que chaque permutation possède un seul encodage.

Goldie [16], afin de trouver le lien entre le nombre de records et le nombre de cycles, a travaillé également sur l'ordre des cycles d'une permutation et l'ordre dans lequel on peut ranger les éléments à l'intérieur de chaque cycle.

Spitzer présente et utilise dans son papier un résultat remarquable [32, Théorème 2.2], démontré avec Bohnenblust. Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et si  $\sigma$  est une permutation de  $[n]$ , alors  $\sigma x = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n})$ , et il définit

$$S(\sigma x) = \max_{1 \leq k \leq n} \left( \sum_{i=1}^k x_{\sigma_i} \right)^+$$

où  $a^+ = \max[0, a]$ .

Si  $\tau$  est une permutation représentée en produit de cycles, soit  $\tau = (\alpha_1(\tau))(\alpha_2(\tau))\dots(\alpha_n(\tau))$  où les  $\alpha_i(\tau), i = 1, 2, \dots, n(\tau)$ , sont des ensembles d'entiers disjoints dont l'union est  $[n]$ , il définit alors

$$T(\tau x) = \sum_{i=1}^{n(\tau)} \left( \sum_{k \in \alpha_i(\tau)} x_k \right)^+$$

Le résultat est le suivant : si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des nombres rationnellement indépendants, alors pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , les ensembles  $[S(\sigma x)]$  et  $[T(\tau x)]$ , générés lorsque  $\sigma$  et  $\tau$  décrivent l'ensemble des  $n!$  permutations de  $[n]$ , sont identiques.

La démonstration repose, pour un  $x$  fixé, sur la construction d'une bijection entre les permutations de la forme  $\sigma$  et les permutations de la forme  $\tau$ . C'est l'algorithme de Bohnenblust-Spitzer qui permet de construire cette bijection sur l'ensemble des permutations de  $[n]$ , algorithme qui a lui-même son intérêt propre dans l'obtention de résultats concernant des variables aléatoires liées à des marches aléatoires.

Spitzer démontre ensuite, [32, Théorème 3.1], une formule analytique appelée "Identité de Spitzer" dont nous reparlerons plus loin, qui lie la fonction caractéristique de  $\max S_k^+$ ,  $\Phi_n(\lambda) = \mathbb{E} \exp(i\lambda \max S_k^+)$  et la fonction caractéristique de  $S_n^+$ ,  $\psi_n(\lambda) = \mathbb{E} \exp(i\lambda S_n^+)$  : pour  $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\lambda) t^n = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\lambda)}{n} t^n \right]$$

Notons le travail de Wendel [36] qui démontre cette dernière formule directement par des moyens analytiques puis en déduit le résultat de Spitzer mentionné plus haut.

Un résultat plus profond que (1) qui semble avoir été connu de Spitzer [32], a été montré explicitement par Goldie [16] en utilisant une généralisation par Brunk du Lemme de Spitzer [7]. Spitzer travaille avec des nombres réels et utilise la fonction  $\max$  avec un ordre déterminé par les moyennes arithmétiques alors que Brunk étend ce travail à des ensembles partiellement ordonnés plus généraux.

Le résultat démontré par Goldie est que sous l'hypothèse **A** la loi de la *partition de  $n$*  générée par les longueurs des faces du majorant concave sur  $[0, n]$ , et qui peut être encodée par ces longueurs rangées dans l'ordre décroissant au sens large, est la même que la loi de la partition de  $n$  générée par les cycles d'une permutation aléatoire - ce résultat sera démontré comme un corollaire de notre théorème principal. Nous en déduisons que la partition générée par les longueurs des faces du majorant concave peut être générée par un *processus uniforme de "stick breaking"* discret sur  $[0, n]$  [25]. Ce résultat soulève le problème suivant :

**Le problème du réarrangement.** Conditionnellement à la partition de  $n$  générée par les longueurs des faces du majorant concave de la marche aléatoire  $S^{[0,n]}$  qui ont des longueurs  $n_1, \dots, n_k$  avec  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq 0$ ,

- dans quel ordre et avec quels accroissements doit-on ranger les faces  $f_1, \dots, f_k$  du majorant concave de longueurs respectives  $n_1, \dots, n_k$  pour recréer le majorant concave de la marche aléatoire  $S^{[0,n]}$  ?

- étant donné le majorant concave, quelle est la loi des valeurs de la marche aléatoire  $S^{[0,n]}$  entre les sommets de son majorant concave ?

Nous répondons à ces questions par le Théorème 1 qui nous donne une construction simultanée de la marche et de son majorant concave conditionnée par la partition générée par les longueurs des faces de son majorant concave. Le théorème sera démontré dans la Partie 2 sous l’hypothèse **A**, et pour le cas général dans la Partie 6, l’idée clé pour les deux démonstrations étant qu’il est suffisant de prouver que le Théorème est vrai si  $X_1, \dots, X_n$  sont des tirages aléatoires uniformes sans remise dans un ensemble de  $n$  nombres réels. Puisque la construction donnée dans le théorème s’applique à des variables échangeables  $X_1, \dots, X_n$  dans le cas général, cela nous permet d’étudier dans la Partie 6 la structure du majorant concave dans le cas général. L’énoncé du théorème est compliquée, mais facile à décrire de manière informelle, particulièrement sous l’hypothèse **A**, où alors la construction est la suivante. Conditionnée par les longueurs des blocs de la partition générée par le majorant concave, soit  $(n_1, \dots, n_k)$  :

- Séparer  $X_1, \dots, X_n$  en  $k$  blocs

$$(X_1, \dots, X_{n_1})(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}) \cdots (X_{\sum_{i=1}^{k-1} n_i+1}, \dots, X_{\sum_{i=1}^k n_i})$$

- Ranger les blocs dans l’ordre des moyennes arithmétiques décroissantes.
- Appliquer à l’intérieur de chaque bloc l’unique permutation des accroissements telle que la marche obtenue avec les accroissements permutés reste pour chaque bloc sous la droite passant par les points extrêmes.

Ce processus définit une permutation des accroissements d’origine qui laisse la loi de la marche  $S^{[0,n]}$  inchangée et en même temps nous procure des informations sur le majorant concave. Dans le cas où les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, nous pouvons alors simplement générer des marches indépendantes de longueurs  $n_1, \dots, n_k$ , permuter cycliquement les accroissements de chaque marche de manière appropriée, et enfin ranger les marches dans l’ordre des pentes décroissantes. L’idée d’utiliser des permutations cycliques pour transformer les ponts d’une marche aléatoire en excursions est due à Vervaat [35]. Des précisions sur son idée sont données dans la Partie 7.

Si l’hypothèse **A** n’est pas satisfaite il y a deux difficultés supplémentaires. Certains blocs peuvent avoir la même moyenne arithmétique, auquel cas leur ordre de rangement est choisi de manière uniforme, et à l’intérieur d’un bloc il peut exister plus d’une permutation cyclique des accroissements qui laisse la marche avec ces accroissements sous la droite passant par les points extrêmes, auquel cas la permutation cyclique est choisie de manière uniforme parmi les différentes possibilités. Par l’échangeabilité, il serait aussi possible de prendre les blocs de même moyenne arithmétique dans l’ordre d’apparition plutôt que dans un ordre aléatoire, mais ceci rend l’énoncé du théorème plus difficile et ne rend pas la démonstration plus simple.

Afin de faciliter l'énoncé du théorème, il est nécessaire de définir l'ensemble de toutes les permutations qui permutent cycliquement les accroissements à l'intérieur de certains blocs et ensuite rangent ces blocs dans un ordre quelconque.

**Définition.** Soit  $\Sigma_n$  l'ensemble des permutations de  $[n]$ , et soit  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des partitions de  $n$ , encodées dans l'ordre décroissant au sens large. Pour  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}_n$  soit  $\Sigma_{(n_1, \dots, n_k)} \subseteq \Sigma_n$  tel que  $\sigma \in \Sigma_{(n_1, \dots, n_k)}$  si et seulement si pour un  $\tau \in \Sigma_k$  et  $(r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{Z}^k$  nous avons

$$\sigma \left( \sum_{l=1}^{i-1} n_{\tau(l)} + j \right) = \left( \sum_{l=1}^{\tau(i)-1} n_l \right) + ((j + r_i) \bmod n_{\tau(i)}) + 1$$

pour  $1 \leq j \leq n_{\tau(i)}$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Dans la définition de  $\Sigma_{(n_1, \dots, n_k)}$  qui vient d'être donnée, le décalage cyclique choisi pour le  $\tau(i)$ -ème bloc est donné par  $r_i$  et l'ordonnement des  $k$  blocs est donné par  $\tau$ .

**Théorème 1.** Soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{\ell=1}^j X_\ell$  pour  $1 \leq j \leq n$ , où  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires de loi jointe échangeable quelconque. Soit  $S^{[0, n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$ . Indépendamment des variables  $X_1, \dots, X_n$ , soit  $L_{n,1}, L_{n,2}, \dots, L_{n,K_n}$  une suite de variables aléatoires distribuées comme les longueurs des cycles d'une permutation aléatoire de  $[n]$  rangées dans l'ordre décroissant au sens large. Conditionnellement à  $\{K_n = k\}$  et  $\{L_{n,i} = n_i : 1 \leq i \leq k\}$ , soit  $B$  le sous-ensemble aléatoire de  $\Sigma_n$  défini par la relation suivante :  $\sigma$  appartient à  $B$  si et seulement si  $\sigma \in \Sigma_{(n_1, \dots, n_k)}$  et il existe  $\tau \in \Sigma_k$  telle que la fonction définie sur  $[k]$  par

$$i \mapsto \Delta_{n,i}^{\sigma, \tau} := \frac{1}{n_{\tau(i)}} \left( \sum_{\ell=n_{\tau(1)}+\dots+n_{\tau(i-1)}+1}^{n_{\tau(1)}+\dots+n_{\tau(i)}} X_{\sigma(\ell)} \right) \quad (2)$$

soit une fonction décroissante de  $i$  et pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , nous avons

$$\frac{1}{m} \left( \sum_{\ell=n_{\tau(1)}+\dots+n_{\tau(i-1)}+1}^{n_{\tau(1)}+\dots+n_{\tau(i-1)}+m} X_{\sigma(\ell)} \right) \leq \Delta_{n,i}^{\sigma, \tau} \quad \text{pour } 1 \leq m \leq n_{\tau(i)}. \quad (3)$$

Conditionnée par  $B$ , soit  $\rho$  un élément aléatoire uniforme de  $B$ , indépendamment de toutes les variables aléatoires introduites précédemment. Pour  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , soit  $S_j^\rho = \sum_{\ell=1}^j X_{\rho(\ell)}$  et soit  $S_\rho^{[0, n]} = \{(j, S_j^\rho) : 0 \leq j \leq n\}$ . Alors  $S_\rho^{[0, n]} \stackrel{d}{=} S^{[0, n]}$ .

La condition impliquée dans (2) assure que la permutation que nous choisissons finalement range les blocs d'accroissements dans l'ordre décroissant des moyennes arithmétiques, c'est-à-dire dans l'ordre décroissant des pentes,



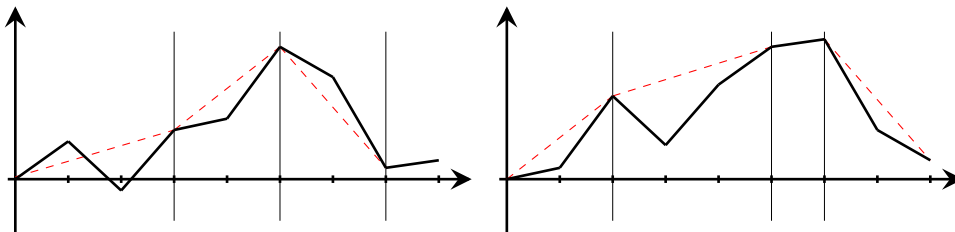


FIG. 1: A gauche, quatre marches de longueurs respectives 3, 2, 2, 1, avec les pentes données par les moyennes arithmétiques tracées en pointillés. A droite, les quatre marches rangées dans l'ordre des pentes décroissantes et les accroissements de chaque marche permutés afin que chaque marche reste sous son majorant concave tracé en pointillés

et la condition impliquée dans (3) assure que la permutation cyclique choisie pour chaque bloc oblige la marche à rester sous la droite joignant les points extrêmes des accroissements de ce bloc. Dans le cas où  $X_1, \dots, X_n$  satisfait l'hypothèse **A**, l'ensemble aléatoire  $B$  ne contient presque sûrement qu'un élément et alors la variable aléatoire supplémentaire  $\rho$  est inutile.

Dans l'exemple Figure 1,  $n = 8$  et  $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (3, 2, 2, 1)$  est la partition de  $n$  générée par les longueurs des faces du majorant concave rangées en ordre décroissant. On génère  $k = 4$  marches aléatoires  $(X_1, X_2, X_3)$ ,  $(X_4, X_5)$ ,  $(X_6, X_7)$  et  $(X_8)$ . On ordonne ensuite ces marches suivant les moyennes arithmétiques décroissantes avec par exemple  $\tau(1) = 2$ ,  $\tau(2) = 1$ ,  $\tau(3) = 4$ ,  $\tau(4) = 3$ , pour obtenir  $(X_4, X_5)$ ,  $(X_1, X_2, X_3)$ ,  $(X_8)$ ,  $(X_6, X_7)$ . Ensuite on permute cycliquement les éléments de chaque marche afin que celle-ci reste sous la corde joignant ses extrémités. Par exemple  $(X_4, X_5)$ ,  $(X_2, X_3, X_1)$ ,  $(X_8)$ ,  $(X_7, X_6)$ . On obtient finalement la marche aléatoire  $(X_4, X_5, X_2, X_3, X_1, X_8, X_7, X_6)$  soit  $\sigma(1) = 4$ ,  $\sigma(2) = 5$ ,  $\sigma(3) = 2, \dots$ . Et le majorant concave de la marche obtenue a 4 faces de longueurs respectives 2, 3, 1, 2, dans cet ordre.

Cette méthode permet d'envisager l'analyse du majorant concave de certains processus après un changement d'échelles et un passage à la limite quand  $n \rightarrow \infty$ . On peut consulter à ce sujet l'article de Pitman et Uribe Bravo [26] dont nous reparlerons plus loin. Par contre Groeneboom et Pitman ont utilisé une approche différente dans le cas du mouvement brownien sur  $[0, \infty)$  et Bertoin également n'a pas utilisé des limites de marches aléatoires pour obtenir sa description du minorant convexe d'un processus de Cauchy.

Certaines idées de notre construction sont contenues dans le travail de Spitzer [32], qui a observé que si  $\Delta_{n,i}$  est l'accroissement de la marche sur la  $i$ -ème face du majorant concave, alors pour le maximum

$$M_n := \max_{0 \leq k \leq n} S_k$$

nous avons la représentation presque sûre

$$M_n = \sum_{i=1}^{F_n} \Delta_{n,i} 1(\Delta_{n,i} \geq 0). \quad (4)$$

Spitzer a montré une représentation beaucoup plus simple en loi

$$M_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{K_n} \Delta_{n,i}^* 1(\Delta_{n,i}^* \geq 0) \quad (5)$$

où  $K_n$  est le nombre de cycles d'une permutation aléatoire indépendante de la marche aléatoire  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$  et, sachant que  $K_n = k$  et que la permutation a des cycles de longueurs  $L_{n,1}, \dots, L_{n,k}$ , les  $\Delta_{n,i}^*$  sont conditionnellement indépendants, avec

$$(\Delta_{n,i}^* | K_n = k, L_{n,i} = \ell) \stackrel{d}{=} S_\ell, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k, \text{ et } 1 \leq \ell \leq n.$$

C'est un corollaire immédiat de notre théorème, et nous l'étudierons dans la Partie 5.3. Des conséquences de ce résultat amènent de nouvelles idées qui apparaissent dans ce papier. Soit  $S_\ell^+ = S_\ell \vee 0$ . Comme cela a été remarqué par Spitzer, l'identité remarquable de Hunt [22, Théorème 4.1]

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\mathbb{E}(S_\ell^+)}{\ell} \quad (6)$$

se déduit aisément de (5), ainsi que la description complète de la loi de  $M_n$  pour tout  $n = 1, 2, \dots$  qui suit, description connue sous le nom d'Identité de Spitzer : pour  $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \mathbb{E} e^{itM_n} = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \mathbb{E} e^{itS_k^+} \right) \quad (7)$$

Pour indiquer comment (6) se déduit de (5), rappelons que le nombre moyen de cycles de longueur  $\ell$  dans une permutation aléatoire de  $[n]$  est  $\ell^{-1}$ . Ainsi (6) décompose l'espérance de la somme dans (5) suivant les contributions des cycles de tailles différentes  $\ell$ .

$$\sum_{i=1}^{K_n} \Delta_{n,i}^* 1(\Delta_{n,i}^* \geq 0) = \sum_{\ell=1}^n k_\ell S_\ell^+$$

où  $k_\ell$  est le nombre de cycles de longueur  $\ell$ . Alors

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(k_\ell S_\ell^+) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(k_\ell) \mathbb{E}(S_\ell^+) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\mathbb{E}(S_\ell^+)}{\ell}$$

Dans son papier, Spitzer note que l'identité (6) peut aussi se déduire de l'identité (7) en différentiant par rapport à  $t$  puis en posant  $t = 0$ , soit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \mathbb{E}(M_n) &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \mathbb{E}(S_k^+) \right) \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \mathbb{E}(S_k^+) \right) \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à identifier pour tout  $n$  les coefficients de  $q^n$  des deux membres de l'égalité ci-dessus.

Pour donner une interprétation similaire de (7), soit  $n(q)$  une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $1-q$ , ainsi  $\mathbb{P}(n(q) \geq n) = q^n$  pour  $n = 0, 1, \dots$ , et supposons que  $n(q)$  est indépendante de la marche aléatoire. Alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{itM_{n(q)}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{itM_{n(q)}} | n(q) = n) \mathbb{P}(n(q) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}e^{itM_n} q^n (1-q) \\ &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \mathbb{E}e^{itM_n} \end{aligned}$$

en utilisant (7) et le développement  $-\log(1-q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k/k$ , nous obtenons

$$\mathbb{E}e^{itM_{n(q)}} = \exp \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \right) \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \mathbb{E}e^{itS_k^+} \right)$$

qui peut s'écrire comme dans [19] :

$$\mathbb{E}e^{itM_{n(q)}} = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} (\mathbb{E}e^{itS_k^+} - 1) \right) \quad (8)$$

Autrement dit, le maximum  $M_{n(q)}$  de la marche jusqu'à un temps géométrique indépendant  $n(q)$  suit une loi de Poisson composée :

$$M_{n(q)} \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N(q^k/k)} S_{k,i}^+ \quad (9)$$

où pour  $q$  fixé les  $N(q^k/k)$  sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres  $q^k/k$  pour  $k = 1, 2, \dots$ , et ces variables étant données, les  $S_{k,i}$  pour  $1 \leq i \leq N(q^k/k)$  sont indépendantes avec  $S_{k,i} \stackrel{d}{=} S_k$ . Comme cela a été observé par Greenwood et Pitman [19], l'identité en loi (9), et le résultat l'accompagnant qui détermine la loi générale de  $S_n - M_n$  et  $\min_{0 \leq k \leq n} S_k$  pour tout  $n$ , peuvent se déduire, ainsi que d'autres résultats de la théorie des fluctuations sur les lois des hauteurs d'échelles et des temps d'échelles, à partir de la décomposition

$$S_{n(q)} = M_{n(q)} + (S_{n(q)} - M_{n(q)}) \quad (10)$$

qui exprime la variable de Poisson composée  $S_{n(q)}$  comme la somme de deux variables de Poisson composée indépendantes prenant des valeurs positives et négatives respectivement. De plus, comme cela est montré par Greenwood et Pitman dans [18], cette discussion peut s'étendre à un temps limite continu afin d'en déduire un ensemble d'identités en théorie des fluctuations pour les maxima, minima et les processus d'échelles associés aux processus de Lévy. Pour cela, les auteurs introduisent un temps aléatoire suivant une loi exponentielle, soit la version continue de la loi géométrique utilisée ici, et utilisent la notion développée par Itô de processus de Poisson ponctuel des excursions [21].

Dans la partie 5.3 nous donnerons de nouvelles explications concernant les loi de Poisson composées mentionnées plus haut.

Le reste de l'article est structuré comme suit. Dans la Partie 2 nous allons démontrer le Théorème 1 sous l'hypothèse **A** et donner des corollaires permettant de lier les partitions et les compositions induites par le majorant concave. Dans la Partie 3, nous donnons quelques exemples spécifiques de probabilités des compositions, entre autres dans le cas des accroissements de Cauchy, qui apparaîtra relativement simple. Dans la Partie 4 nous étendons la description au cas où  $n$  est remplacé par  $n(q)$ , une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $1 - q$ , qui amène une description du majorant concave et des excursions sous chaque face comme un processus ponctuel de Poisson. Dans la Partie 5 nous appliquons la théorie Poissonnienne. D'abord, par passage à la limite quand  $q \rightarrow 1$  nous trouvons une description du majorant concave pour une marche aléatoire sur  $[0, \infty)$ , et les excursions associées sous chaque face. Ensuite nous analysons le comportement du majorant concave quand  $n$  croît. Enfin nous étudions les parties avant et après le maximum de la marche. Dans la Partie 5.3 nous étudions les deux majorants concaves qui résultent de la décomposition de la marche à son maximum, et leurs partitions associées. Dans la Partie 6 nous étendons la théorie au cas où  $X_1, \dots, X_n$  ne satisfont pas l'hypothèse **A**. Toujours dans la Partie 6 nous étudions trois compositions emboîtées de nombres entiers qui apparaissent naturellement. A la fin de cette Partie 6 nous donnons quelques exemples d'application de la théorie générale. Dans la Partie 7 nous finissons de répondre au problème du réarrangement mentionné plus haut en décrivant la

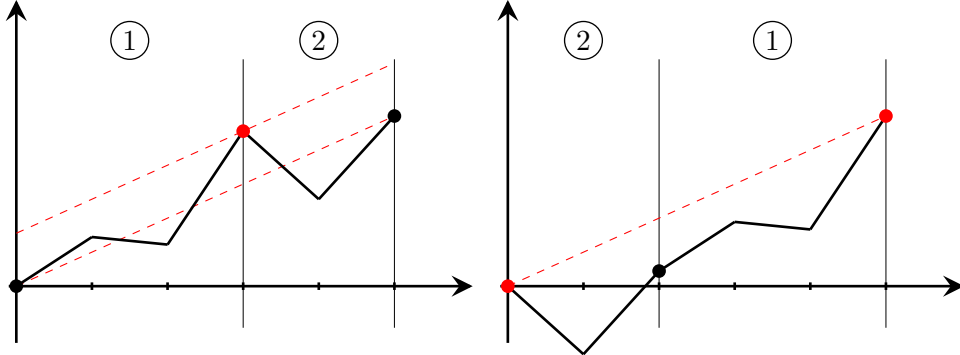


FIG. 2: Le point marqué en rouge à gauche est le seul point situé au-dessus de la droite de pente  $S_n/n$  pour lequel la distance verticale avec cette droite est maximale.

loi d'une marche aléatoire conditionnellement aux valeurs de son majorant concave. Enfin, dans la Partie 8, nous décrivons une importante transformation de la trajectoire qui assure à Pitman et Uribe Bravo les bases d'une étude complète du majorant concave d'un processus de Lévy [26].

## 2 Démonstration du Théorème 1 sous l'hypothèse **A**, lois des partitions et des compositions

Nous commençons par un Lemme facile dû à Spitzer reliant les permutations cycliques des accroissements des marches qui montre que sous l'hypothèse **A** les permutations cycliques appropriées mentionnées dans l'introduction sont presque sûrement uniques.

**Lemme 2.** [32, Théorème 2.1] *Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur tel que deux sous-ensembles de coordonnées quelconques n'ont pas la même moyenne arithmétique.*

*Pour  $1 \leq k \leq n$  soit  $x_{k+n} = x_k$ , et soit  $x(k) = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1})$ . Alors il existe un unique  $k^*$ ,  $1 \leq k^* \leq n$  tel que la marche d'accroissements  $x(k^*) = (x_{k^*}, x_{k^*+1}, \dots, x_{k^*+n-1})$  reste sous la corde joignant les points extrêmes.*

La situation est claire sur la Figure 2

Spitzer prouve en fait un peu plus que cela. Sous la condition que  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  et que aucune autre somme partielle ne s'annule, il démontre que pour tout  $r = 0, 1, \dots, n-1$  il existe exactement un unique  $k^*$ ,  $1 \leq k^* \leq n$  tel que  $x(k^*)$  a exactement  $r$  de ses sommes partielles successives positives. Il applique ensuite ce résultat aux nombres  $x_k - s_n/n$  dont la somme s'annule et dont chaque somme partielle  $s_k - (k/n)s_n$  représente la distance

verticale entre un sommet et la corde joignant les points extrêmes. Donc pour tout  $r$ ,  $0 \leq r \leq n - 1$ , il existe exactement une permutation cyclique des accroissements telle que exactement  $r$  sommets restent strictement sous la corde joignant les points extrêmes.

**Démonstration. (Théorème 1 sous l'hypothèse A)** En conditionnant par l'ensemble des valeurs que prennent  $X_1, \dots, X_n$  il est suffisant de montrer que  $S_\rho^{[0,n]} \stackrel{d}{=} S^{[0,n]}$  dans le cas où  $X_1, \dots, X_n$  sont des tirages aléatoires uniformes sans remise parmi  $n$  nombres réels  $x_1, \dots, x_n$  tels que deux sous-ensembles quelconques de  $x_1, \dots, x_n$  n'ont pas la même moyenne arithmétique. Donc il est suffisant de montrer que pour toute permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  nous avons

$$\mathbb{P}(X_{\rho(1)} = x_{\sigma(1)}, \dots, X_{\rho(n)} = x_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n!}$$

et sans perte de généralité il est suffisant de montrer cela si  $\sigma$  est la permutation identité. Supposons que le majorant concave de la marche déterministe d'accroissements  $(x_1, \dots, x_n)$  a  $k$  faces dont les longueurs dans l'ordre d'apparition sont  $(m_1, \dots, m_k)$ , ainsi la composition induite par les longueurs des faces du majorant concave est  $(m_1, \dots, m_k)$ . Soit  $\tau \in \Sigma_k$  tel que

$$(n_1, \dots, n_k) := (m_{\tau(1)}, \dots, m_{\tau(k)})$$

sont les longueurs des  $k$  faces en *ordre décroissant au sens large*, ainsi la partition induite par les longueurs des faces du majorant concave est  $(n_1, \dots, n_k)$ .

Nous allons utiliser ici la formule d'échantillonnage de Ewens qu'il a énoncée en 1972 alors qu'il étudiait des questions de génétique des populations et de théorie de l'évolution. Cette formule permet de définir une loi de probabilité sur l'ensemble des partitions de  $n$ . Soit  $\theta$  un paramètre de la loi et  $\mathbb{P}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  la probabilité qu'une partition de  $n$  soit formée de  $a_j$  parties de taille  $j$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ , avec  $\sum_j j a_j = n$  et  $\sum_j a_j = k$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \frac{n!}{\theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)} \prod_{j=1}^n \frac{\theta^{a_j}}{j^{a_j} a_j!} \\ &= \frac{\theta^k n!}{\theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)} \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{a_j} a_j!} \end{aligned}$$

On peut consulter sur ce sujet Tavaré et Ewens [34] ou Kingman [23].

Dans le cas d'une loi uniforme,  $\theta = 1$ , et la formule se réduit à :

$$\mathbb{P}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{a_j} a_j!}$$

Et dans le cas où pour tout  $j$  les  $a_j$  ne prennent que les valeurs 0 ou 1, avec  $\sum_j a_j = k$ , nous obtenons la probabilité que la partition de  $n$  soit formée

de  $k$  parties de tailles respectives distinctes  $n_1, \dots, n_k$  avec  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , soit  $\prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$

Suposons pour commencer que chaque élément  $(n_1, \dots, n_k)$  est distinct. Alors l'événement  $\{X_{\rho(\ell)} = x_\ell : 1 \leq \ell \leq n\}$  se réalise si et seulement si

- (i) la partition choisie en accord avec les longueurs des cycles d'une permutation aléatoire est  $(n_1, \dots, n_k)$  ;
- (ii) pour tout  $1 \leq i \leq k$ , la liste ordonnée  $(X_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, X_{n_1+\dots+n_i})$  est l'une des  $n_i$  permutations cycliques de la liste ordonnée  $(x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i)-1}+1}, \dots, x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i)}})$ .

Appliquant la Formule d'Echantillonnage de Ewens, l'événement en (i) est de probabilité  $\prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$ . L'événement en (ii) est indépendant de l'événement en (i), et a pour probabilité  $\frac{1}{n!} \prod_{i=1}^k n_i$ .

Supposons maintenant que les éléments  $(n_1, \dots, n_k)$  ne sont pas tous distincts. Pour  $1 \leq j \leq n$  soit  $I_j = \{i : n_i = j\}$  et soit  $a_j = |I_j|$ . L'événement  $\{X_{\rho(\ell)} = x_\ell : 1 \leq \ell \leq n\}$  se réalise si et seulement si

- (i) la partition choisie en accord avec les longueurs des cycles d'une permutation aléatoire est  $(n_1, \dots, n_k)$  ;
- (ii) pour tout  $1 \leq j \leq n$  et pour tout  $i \in I_j$ , la liste ordonnée  $(X_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, X_{n_1+\dots+n_i})$  est l'une des  $n_i = j$  permutations cycliques de la liste ordonnée  $(x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i')-1}+1}, \dots, x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i')}})$  pour un  $i' \in I_j$ .

Appliquant la Formule d'Echantillonnage de Ewens, l'événement en (i) est de probabilité  $\left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}\right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j!}\right)$ . L'événement en (ii) est indépendant de l'événement en (i), et a pour probabilité  $\frac{1}{n!} \left(\prod_{i=1}^k n_i\right) \left(\prod_{j=1}^n a_j!\right)$ . D'où  $\mathbb{P}(X_{\rho(\ell)} = x_\ell : 1 \leq \ell \leq n) = \frac{1}{n!}$ .  $\square$

Une conséquence directe du Théorème 1 est le résultat de Goldie [16] mentionné dans l'introduction.

**Corollaire 3.** *Soit  $M_{n,1}, \dots, M_{n,F_n}$  les longueurs des faces du majorant concave de  $S^{[0,n]}$  rangées dans l'ordre décroissant au sens large. Alors sous l'hypothèse **A** la loi jointe de  $M_{n,1}, \dots, M_{n,F_n}$  est donnée par la formule*

$$\mathbb{P}(F_n = k, M_{n,i} = n_i, 1 \leq i \leq k) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{a_j} a_j!}$$

pour tout  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}_n$ , où  $a_j = \#\{i : 1 \leq i \leq k, n_i = j\}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . C'est-à-dire la partition de  $n$  induite par les longueurs des faces du majorant concave de  $S^{[0,n]}$  a la loi de la partition de  $n$  induite par les longueurs des cycles d'une permutation aléatoire.

**Démonstration.** Suivant la construction utilisée pour le Théorème 1, les longueurs  $L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}$  sont exactement les longueurs des faces du majorant concave de  $S_\rho^{[0,n]}$ , et la conclusion s'en déduit puisque  $S^{[0,n]} \stackrel{d}{=} S_\rho^{[0,n]}$ .  $\square$

Le Théorème 1 nous permet maintenant de décrire la loi de la composition induite par les longueurs des faces du majorant concave.

**Corollaire 4.** Soit  $(N_{n,1}, \dots, N_{n,F_n})$  la composition de  $n$  induite par les longueurs des faces du majorant concave de  $S^{[0,n]}$ . Alors sous l'hypothèse **A**, la loi jointe de  $N_{n,1}, \dots, N_{n,F_n}$  est donnée par la formule

$$\mathbb{P}(F_n = k, N_{n,i} = n_i, 1 \leq i \leq k) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{n_1}^{(1)}}{n_1} > \frac{S_{n_2}^{(2)}}{n_2} > \dots > \frac{S_{n_k}^{(k)}}{n_k}\right) \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$$

pour toute composition  $(n_1, \dots, n_k)$  de  $n$  en  $k$  parties, où pour  $1 \leq i \leq k$

$$S_{n_i}^{(i)} := S_{n_1 + \dots + n_i} - S_{n_1 + \dots + n_{i-1}} \stackrel{d}{=} S_{n_i}$$

En particulier, si les  $X_i$  sont indépendants, alors les  $S_{n_i}^{(i)}$  le sont aussi pour  $1 \leq i \leq k$ .

**Démonstration.** Fixons une composition  $(n_1, \dots, n_k)$  et soit  $(\vec{n}_{\tau(1)}, \dots, \vec{n}_{\tau(k)})$  un rangement de  $(n_1, \dots, n_k)$  en ordre décroissant au sens large. Soit  $T$  l'ensemble des  $\tau \in \Sigma_k$  tels que  $(\vec{n}_{\tau(1)}, \dots, \vec{n}_{\tau(k)}) = (n_1, \dots, n_k)$ . Alors  $|T| = \prod_{j=1}^n a_j!$ , où  $a_j = \#\{i : 1 \leq i \leq k, n_i = j\}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Nous voulons comparer les pentes des faces du majorant concave qui résulte de la construction utilisée au Théorème 1. Allant dans cette direction, pour  $1 \leq i \leq k$  soit

$$S_{\vec{n}_{\tau(i)}}^{(\tau(i))} = S_{\vec{n}_1 + \dots + \vec{n}_{\tau(i)}} - S_{\vec{n}_1 + \dots + \vec{n}_{\tau(i)-1}} \stackrel{d}{=} S_{\vec{n}_{\tau(i)}} = S_{n_i}$$

Suivant la construction utilisée au Théorème 1, les événements  $\{F_n = k\}$  et  $\{N_{n,i} = n_i : 1 \leq i \leq k\}$  se réalisent si et seulement si

- (i)  $(L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}) = (\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k)$ ;
- (ii)  $\frac{S_{\vec{n}_{\tau(1)}}^{(\tau(1))}}{n_1} > \frac{S_{\vec{n}_{\tau(2)}}^{(\tau(2))}}{n_2} > \dots > \frac{S_{\vec{n}_{\tau(k)}}^{(\tau(k))}}{n_k}$  pour un  $\tau \in T$ .

Comme précédemment, l'événement en (i) a pour probabilité  $\left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}\right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j!}\right)$ . L'événement en (ii) est indépendant de l'événement en (i), et par échangeabilité la probabilité qu'il se réalise pour un élément particulier de  $T$  est

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{n_1}^{(1)}}{n_1} > \frac{S_{n_2}^{(2)}}{n_2} > \dots > \frac{S_{n_k}^{(k)}}{n_k}\right)$$

Rappelons que  $|T| = \prod_{j=1}^n a_j!$  et ceci termine la démonstration.  $\square$



### 3 Exemples de probabilités des compositions

Le Corollaire suivant est une version intéressante du Corollaire 4 dans le cas d'accroissements de Cauchy.

**Corollaire 5.** *Supposons que les  $X_i$  sont indépendants et tels que  $S_k/k$  suit la même loi pour tout  $k$ , ce qui est le cas si les  $X_i$  suivent une loi de Cauchy. Alors*

$$\mathbb{P}(F_n = k; N_{n,i} = n_i, 1 \leq i \leq k) = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$$

et donc  $\{N_{n,i} : 1 \leq i \leq F_n\}$  a la même loi que la composition de  $n$  obtenue en choisissant une permutation aléatoire de  $[n]$  puis en rangeant les longueurs des cycles dans un ordre aléatoire uniforme.

**Démonstration.** Puisque  $\frac{S_{n_1}^{(1)}}{n_1}, \dots, \frac{S_{n_k}^{(k)}}{n_k}$  est une suite i.i.d., chacun des  $k!$  rangements est également probable, et donc  $\mathbb{P}\left(\frac{S_{n_1}^{(1)}}{n_1} > \dots > \frac{S_{n_k}^{(k)}}{n_k}\right) = \frac{1}{k!}$ .  $\square$

Notons que la limite continue de ce résultat peut se lire dans le travail de Bertoin [6] sur le minorant convexe du processus de Cauchy. Rappelons que si  $(C_s, s \in [0, 1])$  est un processus de Cauchy standard sur  $\mathbb{R}$ ,  $(M_s, s \in [0, 1])$  est son majorant concave et  $(M'_s, s \in [0, 1])$  est le processus dérivée à droite, croissant avec des trajectoires continues à droite, Bertoin démontre que le processus réciproque continu à droite

$$(\mu_x = \inf\{s \in [0, 1] : M'_s > x \mid x \in \mathbb{R})$$

suit la loi de  $(\gamma_{\rho(x)}/\gamma_1, x \in \mathbb{R})$  où  $\rho(x) = \mathbb{P}(C_s - xs \leq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$ .

Les notions utilisées sont dans [4, chap. VIII] et [5]. Pour arriver à ce résultat, Bertoin prouve que la loi du  $n$ -uplet

$$(\mu_{x_2} - \mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n} - \mu_{x_{n-1}}, 1 - \mu_{x_n})$$

suit la loi de Dirichlet à  $n$  dimensions de paramètres

$$(\rho(x_2) - \rho(x_1), \dots, \rho(x_n) - \rho(x_{n-1}), 1 - \rho(x_n), \rho(x_1))$$

qui est aussi la loi de

$$\frac{1}{\gamma_1}(\gamma_{\rho(x_2)} - \gamma_{\rho(x_1)}, \dots, \gamma_{\rho(x_n)} - \gamma_{\rho(x_{n-1})}, \gamma_1 - \gamma_{\rho(x_n)})$$

Notons que  $\mu_x$  est l'instant où la pente du minorant convexe cesse d'être inférieure ou égale à  $x$ .

La loi de  $(M'_s, 0 < s < 1)$  est alors déduite en remarquant que  $M'_s = \inf\{x \in \mathbb{R}, \mu_x > s\}$ , d'où  $\mathbb{P}(M'_s < x) = \mathbb{P}(\gamma_{\rho(x)} > \gamma_1 s)$ .

Alors si  $(L(x) = \inf\{s \leq 0 : \gamma_s > x\}, x \leq 0)$  est le processus réciproque de  $\gamma$ ,  $\mathbb{P}(M'_s < x) = \mathbb{P}(\rho(x) > L(s\gamma_1)) = \mathbb{P}(-\cot[\pi L(s\gamma_1)] < x)$ .

Précisons une description d'un processus de Poisson-Dirichlet uniforme donnée par l'algorithme suivant, qui est la version continue du processus de "stick breaking" uniforme discret vu précédemment. Construisons une suite de variables aléatoires  $L_1, L_2, \dots$ , avec

- $L_1$  uniforme sur  $[0, 1]$ .
- pour tout  $i \geq 1$ ,  $L_{i+1}$  est uniforme sur  $\left[0, 1 - \sum_{j=1}^i L_j\right]$ .

Si les variables  $M_1, M_2, \dots$ , représentent les variables  $L_1, L_2, \dots$ , rangées en ordre décroissant au sens large, alors  $M_1, M_2, \dots$ , est la partition de  $[0, 1]$  générée par le processus de "stick breaking" uniforme.

La somme des  $M_i$  est presque sûrement égale à 1 et leur loi est la loi de Poisson-Dirichlet de paramètre 1 qui est la loi limite de la décomposition en cycles d'une permutation aléatoire uniforme.

Le Corollaire 5 montre que le modèle de Cauchy discret est le même que celui obtenu par un échantillonnage aléatoire du modèle de Cauchy continu, en utilisant par exemple la théorie de Gneden d'échantillonnage de compositions consistantes d'entiers positifs. [15]. Plus précisément, soit  $U_1, \dots, U_n$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, 1]$  et soit  $X$  un processus de Cauchy sur  $[0, 1]$ . On génère une composition de  $n$  en mettant  $i$  dans le même bloc que  $j$  si et seulement si  $U_i$  et  $U_j$  tombent sur le même segment de la composition de  $[0, 1]$  induite par les longueurs des faces du majorant concave de  $X$ , et ensuite en ordonnant les blocs en accord avec l'ordre des faces du majorant concave de  $X$ . Alors la composition de  $n$  qui est générée aura la même loi que  $(N_{n,1}, \dots, N_{n,F_n})$  du Corollaire 5. Cela ne semble pas évident a priori, et une simulation montre que ce n'est pas vrai dans le cas du mouvement Brownien, suggérant que ce n'est pas vrai en général.

Maintenant soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite échangeable quelconque de variables aléatoires satisfaisant l'hypothèse **A**, comme dans le Corollaire 4. Nous allons donner quelques exemples numériques de probabilités des compositions quand  $n$  est petit. Soit

$$p(n_1, \dots, n_k) := \mathbb{P}(F_n = k, N_{n,i} = n_i, 1 \leq i \leq k)$$

En utilisant la symétrie et les probabilités des partitions données au Corollaire 3 ou au Corollaire 5, nous obtenons des valeurs universelles :

$$p(1, 1) = 1/2, \quad p(2) = 1/2$$

$$p(3) = 1/3, \quad p(2, 1) = p(1, 2) = 1/4, \quad p(1, 1, 1) = 1/6$$

$$p(4) = 1/4, \quad p(1, 3) = p(3, 1) = 1/6, \quad p(2, 2) = 1/8, \quad p(1, 1, 1, 1) = 1/24$$

Notons pour  $n = 4$

$$\mathbb{P}(F_4 = 1) = 1/4, \quad \mathbb{P}(F_4 = 2) = 11/24, \quad \mathbb{P}(F_4 = 3) = 1/4, \quad \mathbb{P}(F_4 = 4) = 1/24$$

Quand  $n$  croît, les premières valeurs qui dépendent d'un choix particulier de la loi des accroissements sont

$$p(1, 1, 2) = p(2, 1, 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_1 > X_2 > \frac{1}{2}(X_3 + X_4))$$

$$p(1, 2, 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_1 > \frac{1}{2}(X_2 + X_3) > X_4)$$

où en accord avec les probabilités des partitions nous devons avoir

$$p(1, 1, 2) + p(2, 1, 1) + p(1, 2, 1) = 1/4$$

Nous considérons deux cas spéciaux - accroissements de Cauchy indépendants et accroissements de Gauss indépendants. Quand les accroissements sont indépendants et de Cauchy, les 3 probabilités ci-dessus sont égales, avec

$$2p(1, 2, 1) = \mathbb{P}(X_1 > \frac{1}{2}(X_2 + X_3) > X_4) = 1/6 = 0.1666666\dots$$

Remarquons que

$$\mathbb{P}(X_1 > \frac{1}{2}(X_2 + X_3) > X_4) = \mathbb{P}(\frac{1}{2}(X_2 + X_3) - X_1 < 0 \text{ et } X_4 - \frac{1}{2}(X_2 + X_3) < 0).$$

Dans le cas d'une loi Gaussienne centrée, nous obtenons  $\mathbb{P}(Y_1 < 0, Y_2 < 0)$  où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux variables aléatoires de loi Gaussienne centrées, de même variance  $\sigma^2$ , de corrélation  $\rho$ , et dont la densité jointe est donnée par

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2)\right]$$

La probabilité du quadrant négatif, après le changement de variable  $t = y_2/y_1$  et  $r^2 = \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)}(y_1^2 + y_2^2)$ , puis l'intégration par rapport à  $r \in [0, +\infty)$ , est

$$\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2-2\rho t}$$

soit

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho$$

Dans le cas de la loi Gaussienne centrée avec  $Var(X_1) = 1$ ,  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux variables de loi Gaussienne centrée, de même variance  $3/2$ , de covariance  $-1/2$  et donc de corrélation  $\rho = -1/3$ . La probabilité est donnée par

$$\frac{1}{4} + \frac{\arcsin(-1/3)}{2\pi} = 0.195913276$$

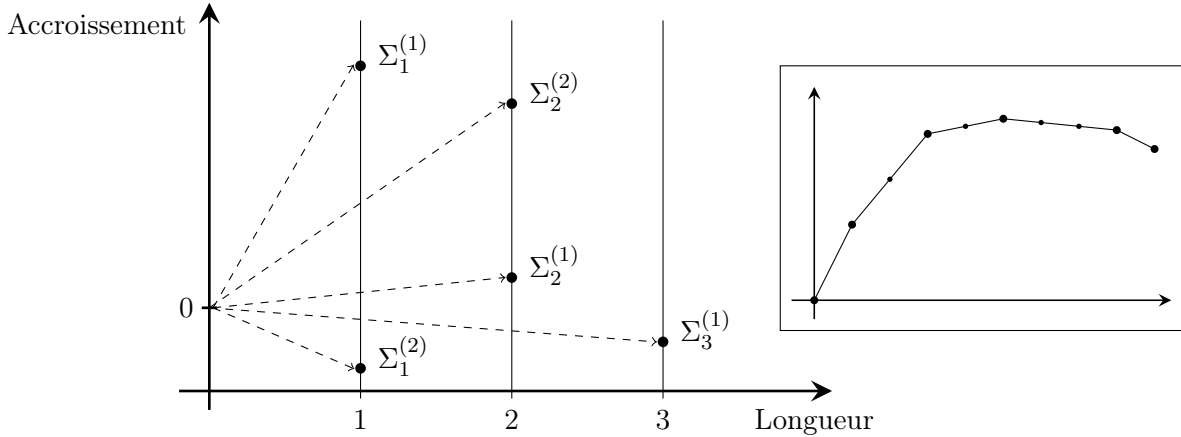


FIG. 3: Un exemple de processus ponctuel et le majorant concave en résultant. Les lignes en pointillés montrent la pente de chaque face, et ces faces sont rangées dans l'ordre des pentes décroissantes.

La différence avec le cas de Cauchy est assez petite. Le fait que cette valeur soit plus grande est lié à la différence du comportement des partitions limites pour  $n$  grand après changement d'échelles ; il est connu que le majorant concave du mouvement brownien a plus probablement des grandes faces dans sa partie centrale que le majorant concave d'un processus de Cauchy. Nous concluons cette partie en conjecturant que  $p(1, 2, 1)$  est une fonction monotone de l'indice de stabilité  $\alpha$  pour les lois stables symétriques.

#### 4 Une description par un processus de Poisson ponctuel

Le majorant concave de  $S^{[0,n]}$  peut être vu comme un processus ponctuel aléatoire sur  $\{1, \dots, n\} \times \mathbb{R}$ , où un point à  $(j, s)$  signifie que l'une des faces du majorant concave a pour longueur  $j$  et pour accroissement  $s$ . Soit  $A_n(j)$  le nombre de faces du majorant concave de  $S^{[0,n]}$  qui ont pour longueur  $j$  pour  $1 \leq j \leq n$ , et soit  $\Sigma_j^{(1)}, \dots, \Sigma_j^{(A_n(j))}$  les accroissements des faces de longueur  $j$  rangés dans un ordre aléatoire uniforme. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes alors pour tout  $1 \leq j \leq n$ , conditionnellement à  $A_n(j) = a_j$ ,  $\Sigma_j^{(\ell)}$  est une copie indépendante de  $S_j$  pour tout  $1 \leq \ell \leq a_j$ . La Figure 3 montre un exemple d'un tel processus ponctuel. Pour construire le majorant concave à partir de ce processus ponctuel les faces de longueur et d'accroissement indiqués par les points sont rangées dans l'ordre décroissant des pentes.

Maintenant supposons que nous avons une suite infinie de variables aléatoires échangeables  $X_1, X_2, \dots$ , dont presque sûrement deux sous-ensembles

quelconques n'ont pas la même moyenne arithmétique. Comme précédemment soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $j \geq 1$ . Suivant les idées sur la théorie des fluctuations de Greenwood et Pitman [19] nous rendons aléatoire la longueur de la marche aléatoire en posant son nombre de pas égal à  $n(q)$ , où  $n(q)$  est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $1 - q$ , ainsi

$$\mathbb{P}(n(q) \geq n) = q^n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

C'est un procédé classique qui permet d'utiliser la propriété d'absence de mémoire. Dans le cas continu on choisit une variable aléatoire de loi exponentielle qui est la version continue de la loi géométrique.

Soit  $S^{[0, n(q)]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n(q)\}$ , et soit

$$0 < N_{n(q),1} < N_{n(q),1} + N_{n(q),2} < \dots < N_{n(q),1} + \dots + N_{n(q),F_{n(q)}} = n(q)$$

les temps successifs auxquels  $S^{[0, n(q)]}$  rencontre son majorant concave, où  $F_{n(q)}$  est le nombre de faces du majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$ . Le lemme suivant, qui entraîne une représentation de Poisson fondamentale de la loi géométrique, est dû à Shepp et Lloyd [29], qui travaillaient seulement sur les partitions générées par des permutations aléatoires, et pas sur les majorants concaves.

**Lemme 6.** *Soit  $A_j = \#\{i : 1 \leq i \leq F_{n(q)}, N_{n(q),i} = j\}$  pour  $j \geq 1$ . Alors  $A_j$  suit une loi de Poisson de moyenne  $q^j/j$ , indépendamment pour tout  $j \geq 1$ .*

**Démonstration.** En remarquant que  $\log(1-q) = -\sum_j q^j/j$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_j = a_j, j \geq 1) &= \mathbb{P}(n(q) = \sum_{j \geq 1} j a_j) \mathbb{P}(A_j = a_j, j \geq 1 | n(q) = \sum_{j \geq 1} j a_j) \\ &= (1-q) q^{\sum_j j a_j} \frac{1}{\prod_j j^{a_j} a_j!} \\ &= \prod_j \frac{\left(\frac{q^j}{j}\right)^{a_j} e^{-\frac{q^j}{j}}}{a_j!} \end{aligned}$$

où la seconde égalité vient du Corollaire 3.  $\square$

L'idée de Shepp et Lloyd est que pour une permutation aléatoire de  $[n]$ , notée  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  où  $\alpha_j$  est le nombre de cycles de longueurs  $j$  alors

$$\mathbb{P}(\alpha_1 = a_1, \dots, \alpha_n = a_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{a_j} a_j!} \quad \text{si } \sum_{j=1}^n j a_j = n$$

et est égal à 0 sinon, donc les  $\alpha_j$  seraient indépendantes s'il n'y avait pas la condition  $\sum_{j=1}^n j a_j = n$ . Supposons alors que les  $\alpha_j$  sont indépendantes et suivent chacune une loi de Poisson de paramètre respectif  $\frac{q^j}{j}$ , soit  $\mathbb{P}_q(\alpha_j = a) = \exp\left(-\frac{q^j}{j}\right) \frac{(q^j/j)^a}{a!}$  avec  $0 < q < 1$ .  $\mathbb{P}_q(\alpha_j \neq 0) = 1 - \exp\left(-\frac{q^j}{j}\right) < \frac{q^j}{j}$

donc  $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_q(\alpha_j \neq 0)$  est finie et le lemme de Borel-Cantelli entraîne que  $\mathbb{P}_q(\alpha_j \neq 0 \text{ pour une infinité de } j) = 0$ . Alors la variable aléatoire  $\nu(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha_j$  est finie avec une probabilité égale à 1 et la loi jointe de  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  s'écrit

$$\mathbb{P}_q(\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \dots) = (1-q)q^{\nu(a)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1/j)^{a_j}}{a_j!}$$

pour  $a = (a_1, a_2, \dots)$ . Ainsi la loi conditionnelle de  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  sachant  $\nu$  ne dépend plus de  $q$  et nous retrouvons bien la loi :

$$\mathbb{P}_q(\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \dots | \nu(\alpha) = n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{a_j} a_j!} \quad \text{si } \sum_{j=1}^n j a_j = n$$

et 0 sinon. De plus, la loi de  $\nu$  est donnée par  $\mathbb{P}_q(\nu(\alpha) = n) = (1-q)q^n$  pour  $n = 0, 1, \dots$ . Son espérance est  $\frac{q}{1-q}$ , et  $q \rightarrow 1$  correspond à  $n \rightarrow \infty$ .

Pour le théorème suivant, et en fait le reste de cette partie, il est important de supposer que  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendantes et de même loi continue. Le théorème affirme que le processus ponctuel mentionné ci-dessus est un processus ponctuel de Poisson sous cette hypothèse.

Dans un cadre plus général les processus de Poisson ponctuels décrivent des processus d'excursion (voir théorème d'Itô) et on pourra consulter les articles de Itô [21] ou de Meyer [24], ou encore Revuz et Yor [28] en liaison avec le mouvement brownien ou Bertoin [4] pour les processus de Lévy.

Brièvement ici, si nous considérons un espace mesuré  $(U, \mathcal{U}, \mu)$  où  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie, un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\mu$  est un ensemble de variables aléatoires  $N(A)$  telles que  $N$  est une mesure de comptage sur  $(U, \mathcal{U})$ , soit pour tout  $A \in \mathcal{U}$ ,  $N(A)$  compte le nombre de points de  $A$ , et si  $A_1, A_2, \dots$  sont des ensembles disjoints,  $N(A_1), N(A_2), \dots$  sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres respectifs  $\mu(A_1), \mu(A_2), \dots$ .

Par exemple, si  $X_1, X_2, \dots$  sont des variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(X_i \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(U)}$ , si  $N(U)$  est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\mu(U)$ , indépendantes des  $X_i$  et si on définit  $N(A) = \sum_{i=1}^{N(U)} 1_{(X_i \in A)}$ , pour tout  $A \in \mathcal{U}$ , alors c'est un PPP d'intensité  $\mu$ .

**Théorème 7.** *Si  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendantes de même loi continue, alors le processus ponctuel des longueurs et des accroissements des faces du majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$  est un processus ponctuel de Poisson sur  $\{1, 2, \dots\} \times \mathbb{R}$  d'intensité  $j^{-1}q^j \mathbb{P}(S_j \in dx)$  pour  $j = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}$ . De plus, soit  $T_i = \sum_{l=1}^i N_{n(q), l}$ ,  $0 \leq i \leq F_{n(q)}$ , les temps consécutifs auxquels  $S^{[0, n(q)]}$  rencontre son majorant concave, avec  $T_0 = 0$  et  $T_{F_{n(q)}} = n(q)$ . Alors la suite des segments*

$$\{(S_{T_i+k} - S_{T_i}, 1 \leq k \leq N_{n(q), i}), i = 0, \dots, F_{n(q)} - 1\},$$

est une liste de points d'un processus ponctuel de Poisson dans l'espace des segments d'une marche aléatoire finie

$$\{(s_1, \dots, s_j) \text{ pour certains } j = 1, 2, \dots\}$$

dont l'intensité sur les chemins de longueur  $j$  est le produit de  $q^j j^{-1}$  par la loi conditionnelle de  $(S_1, \dots, S_j)$  sachant que  $S_k < (k/j)S_j$  pour tout  $1 \leq k \leq j-1$ .

**Démonstration.** Conditionnellement à  $A_j = a_j$  l'accroissement de chaque face de longueur  $j$  est une copie indépendante de  $S_j$  par le Théorème 1. Combiné avec le Lemme 6 ceci démontre la première affirmation.

Conditionné par le fait que le majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$  a une face de longueur  $j$  et un accroissement  $s$ , les accroissements de  $S^{[0, n(q)]}$  sur la face du majorant concave suivent la loi de  $(X_1, \dots, X_j)$  sachant que  $\sum_{\ell=1}^k X_\ell < (k/j)s$  pour tout  $1 \leq k \leq j-1$  et  $\sum_{\ell=1}^j X_\ell = s$ , et cette loi est indépendante pour chaque face de  $S^{[0, n(q)]}$ . Ceci implique la seconde affirmation.  $\square$

Pour illustrer une propriété des processus de Poisson

$$\mathbb{P}(A_1 = 1) = qe^{-q}$$

c'est la probabilité d'obtenir exactement une face de longueur 1. En décomposant le processus ponctuel en deux processus ponctuels de Poisson respectivement sur les accroissements positifs et les accroissements négatifs, chacun d'intensité  $q/2$  si les  $X_i$  suivent une loi symétrique,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 = 1) &= \mathbb{P}((A_1 = 1, \Sigma_1 > 0), (A_1 = 0, \Sigma_1 < 0)) \\ &\quad + \mathbb{P}((A_1 = 0, \Sigma_1 > 0), (A_1 = 1, \Sigma_1 < 0)) \\ &= \frac{q}{2}e^{-q/2}e^{-q/2} + e^{-q/2}\frac{q}{2}e^{-q/2} \end{aligned}$$

Un corollaire simple mais important du Théorème 7 est le suivant.

**Corollaire 8.**  $(n(q), S_{n(q)})$  suit une loi de Poisson composée, et le nombre total de faces  $F_{n(q)}$  du majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$  suit une loi de Poisson de moyenne

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} q^j = -\log(1-q).$$

Le nombre de faces qui est le nombre de points du processus ponctuel est aléatoire mais presque sûrement fini.

Notons que  $(n(q), S_{n(q)}) = \sum_{i=1}^{F_{n(q)}} (N_{n(q), i}, S_{N_{n(q), i}})$

## 5 Applications de la description Poissonienne

### 5.1 La marche aléatoire sur $[0, \infty)$

Par un passage à la limite, quand  $q \rightarrow 1$ , il est possible de déduire la structure du majorant concave de la marche aléatoire sur  $[0, \infty)$  à l'aide du Théorème 7. Groeneboom [20] a donné une description Poissonienne du majorant concave du mouvement brownien sur  $[0, \infty)$ ; le fait qu'il existe une description parallèle proche pour les marches aléatoires ne semble pas avoir été remarqué avant. Le cas des processus de Lévy sera couvert par un papier à venir de Pitman et Uribe Bravo [26].

Supposons  $\mathbb{E}(X_1) = \mu \in [-\infty, \infty)$ . De manière informelle, si  $q \rightarrow 1$ , l'intensité du processus ponctuel de Poisson des longueurs et accroissements des faces tend vers  $j^{-1}\mathbb{P}(S_j \in dx)$ , mais puisque la pente du majorant concave converge en décroissant vers  $\mu$  sans jamais l'atteindre, seules les faces de pente supérieures à  $\mu$  vont contribuer, à la limite, au majorant concave. Alors, d'après la théorie des processus de Poisson marqués, nous obtenons une nouvelle intensité  $j^{-1}\mathbb{P}(S_j \in dx)1(x > j\mu)$ . De plus, nous pouvons aussi décrire les segments de la marche sous chaque face du majorant avec un processus ponctuel de Poisson.

**Théorème 9.** *Soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $j \geq 1$ , où  $X_1, X_2, \dots$  sont des variables indépendantes de même loi continue qui ont une moyenne bien définie  $\mu := \mathbb{E}(X_1) \in [-\infty, \infty)$ . Soit  $S^{(0, \infty)} = \{(j, S_j) : j \geq 0\}$ . Soit  $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$  les temps successifs auxquels  $S^{(0, \infty)}$  rencontre son majorant concave, et soit  $N_i = T_i - T_{i-1}$  pour  $i \geq 1$ . Alors la suite de segments*

$$\{(S_{T_i+k} - S_{T_i}, 1 \leq k \leq N_i), i = 0, 1, \dots\}$$

*est une liste de points d'un processus ponctuel de Poisson dans l'espace des segments d'une marche aléatoire finie*

$$\{(s_1, \dots, s_j) \text{ pour un } j = 1, 2, \dots\}$$

*dont l'intensité sur les chemins de longueur  $j$  est le produit de  $j^{-1}$  par la restriction à  $S_j \in (j\mu, \infty)$  de la loi conditionnelle de  $(S_1, \dots, S_j)$  sachant que  $S_k < (k/j)S_j$  pour tout  $1 \leq k < j$ .*

**Démonstration.** La combinaison des quatre faits suivants est suffisante pour démontrer le théorème :

- (i) le nombre de faces de longueur  $j$  suit une loi de Poisson de moyenne  $j^{-1}\mathbb{P}(S_j > j\mu)$ ;
- (ii) ces nombres sont indépendants quand  $j$  varie;
- (iii) étant donnés ces nombres, et avec  $n$  faces de longueur  $j$ , les  $n$  marches sur les faces associées, rangées dans un ordre aléatoire uniforme in-



dépendamment des marches sur ces faces, sont  $n$  processus indépendants distribués chacun suivant la loi de  $(S_1, \dots, S_j)$  conditionnée par  $S_k < (k/j)S_j$  pour tout  $1 \leq k < j$  et  $S_j > j\mu$ .

- (iv) sachant qu'il y a  $n$  faces de longueur  $j$ , les accroissements de ces faces, rangés dans un ordre aléatoire uniforme, suivent les lois de  $n$  copies indépendantes de  $S_j$  sachant  $S_j > j\mu$ .

La principale vérification à faire est que (i) et (ii) sont vrais, c'est-à-dire que les nombres

$$A_\infty(j) := \#\{i : N_i = j\}$$

sont des variables de Poisson indépendantes de moyenne  $j^{-1}\mathbb{P}(S_j \geq j\mu)$ . Une fois que cela a été prouvé, (iii) et (iv) s'en déduisent par les propriétés des processus de Poisson marqués et les précédentes discussions sur l'indépendance des marches sous chaque segment.

Soit  $n(q)$  une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $1 - q$ . Soit  $S^{[0, n(q)]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n(q)\}$ , ainsi le majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$  et de  $S^{[0, \infty)}$  coïncide jusqu'à un temps aléatoire  $T_{n(q)}^*$ .

**Lemme 10.**  $T_{n(q)}^*$  est le  $T_i$  maximal tel que  $T_i \leq n(q)$ .

**Démonstration.** Pour prouver cela, soit  $i$  tel que  $T_i \leq n(q)$ . Puisque le majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$  est partout sous le majorant concave de  $S^{[0, \infty)}$ , s'ils ne coïncidaient pas au temps  $T_i$  alors le majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$  passerait sous le point  $(T_i, S_{T_i})$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $(T_i, S_{T_i})$  appartient à  $S^{[0, n(q)]}$ .  $\square$

Soit

$$A_{n(q)}(j) := \#\{i : N_{n(q), i} = j\}$$

où  $N_{n(q), 1}, \dots, N_{n(q), F_{n(q)}}$  sont les longueurs des faces du majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$ . Nous avons les décompositions évidentes suivantes

$$A_\infty(j) = A_\infty(j)(0, T_{n(q)}^*] + A_\infty(j)(T_{n(q)}^*, \infty] \quad (11)$$

$$A_{n(q)}(j) = A_{n(q)}(j)(0, T_{n(q)}^*] + A_{n(q)}(j)(T_{n(q)}^*, \infty] \quad (12)$$

où par exemple  $A_\infty(j)(0, T_{n(q)}^*]$  est le nombre de faces du majorant concave de  $S^{[0, \infty)}$  de longueur  $j$  jusqu'à la face se terminant au temps  $T_{n(q)}^*$  comprise, et les autres termes sont définis de manière similaire. De plus, puisque  $T_{n(q)}^*$  est par définition le sommet commun maximal du majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$  et de  $S^{[0, \infty)}$ , il est clair que

$$\begin{aligned} A_\infty(j)(0, T_{n(q)}^*] &= A_{n(q)}(j)(0, T_{n(q)}^*] \\ &= \#\{i : N_{n(q), i} = j, S_{T_i} - S_{T_{i-1}} > j\alpha_{n(q)}\} \end{aligned} \quad (13)$$

où  $\alpha_{n(q)}$  est la dérivée à droite du majorant concave de  $S^{[0, \infty)}$  au temps  $T_{n(q)}^*$ . Conditionnellement à  $\alpha_{n(q)}$ , en utilisant les processus de Poisson marqués et

le Théorème 7 la loi du membre de droite de (13) est une loi de Poisson de moyenne  $q^j j^{-1} \mathbb{P}(S_j > j \alpha_{n(q)})$ , indépendamment pour chaque  $j$ . La stratégie arrivé à ce point est de prendre la limite quand  $q \rightarrow 1$ , soit  $T_{n(q)}^* \rightarrow \infty$  et  $\alpha_{n(q)} \rightarrow \mu$ , d'où  $A_\infty(j)$  suit une loi de Poisson de moyenne  $j^{-1} \mathbb{P}(S_j > j \mu)$ , indépendamment pour chaque  $j$ , entraînant bien (i) et (ii).

Soit  $\{q_m\}_{m \geq 1}$  une suite quelconque telle que si  $\{n(q_m)\}_{m \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètres  $1 - q_m$  alors  $n(q_m) \rightarrow \infty$  presque sûrement quand  $m \rightarrow \infty$  (ainsi nécessairement  $q_m \rightarrow 1$ ). Supposons que  $T_{n(q_m)}^* \rightarrow \infty$  et  $\alpha_{n(q_m)} \rightarrow \mu$  presque sûrement, alors

$$\begin{aligned} A_\infty(j) &= \lim_{m \rightarrow \infty} A_\infty(j)(0, T_{n(q_m)}^*] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \#\{i : N_{n(q_m), i} = j, S_{T_i} - S_{T_{i-1}} > j \alpha_{n(q_m)}\} \quad (14) \end{aligned}$$

où la première égalité vient de (11) et la seconde de (13). Puisque  $\alpha_{n(q_m)} \rightarrow \mu$  presque sûrement, par continuité de la fonction  $x \mapsto \mathbb{P}(S_j > jx)$  la loi du membre de droite de (14) suit une loi de Poisson de paramètre  $j^{-1} \mathbb{P}(S_j > j \mu)$ , indépendamment pour chaque  $j$ . Ceci démontre (i) et (ii).

Il reste à prouver que  $T_{n(q_m)}^* \rightarrow \infty$  et  $\alpha_{n(q_m)} \rightarrow \mu$  presque sûrement quand  $m \rightarrow \infty$ . Pour tout  $i \geq 1$ , puisque  $T_i < \infty$  nous aurons finalement  $n(q_m) > T_i$ , et alors par le Lemme 10 pour tout  $i \geq 1$  nous aurons finalement  $T_{n(q_m)}^* \geq T_i$ . Puisque  $T_i \rightarrow \infty$  ceci implique que  $T_{n(q_m)}^* \rightarrow \infty$  presque sûrement.

**Lemme 11.** *Presque sûrement aucune face du majorant concave de  $S^{[0, \infty)}$  ne peut avoir une pente inférieure à  $\mu$ .*

**Démonstration.** Si  $\mu = -\infty$  alors la conclusion est claire. Supposons  $\mu \in (-\infty, \infty)$ , alors puisque  $S_n - n\mu$  est une marche aléatoire de moyenne nulle et donc récurrente, pour tout  $i \geq 1$  il existe presque sûrement un  $n_i > T_i$  tel que  $S_{n_i} > S_{T_i} + (n_i - T_i)\mu$ , et donc pour tout sommet du majorant concave la pente de la face située à droite doit être supérieure à  $\mu$ .  $\square$

**Lemme 12.** *Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe presque sûrement une face du majorant concave de pente  $x$  telle que  $\mu < x < \mu + \epsilon$ .*

**Démonstration.** Pour tout  $\mu \in [-\infty, \infty)$  par la loi forte des grands nombres  $S_n/n \rightarrow \mu$  presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ . S'il n'existait aucune face du majorant concave sur  $[0, \infty)$  de pente  $x < \mu + \epsilon$  nous aurions alors  $\limsup_n S_n/n > \mu$ . Combiné avec le Lemme 11 la conclusion s'ensuit.  $\square$

Nous avons déjà  $T_{n(q_m)}^* \rightarrow \infty$  presque sûrement. Puisque  $\alpha_{n(q_m)}$  est la dérivée à droite du majorant concave de  $S^{[0, \infty)}$  en  $T_{n(q_m)}^*$ , le Lemme 12 implique que  $\alpha_{n(q_m)} \rightarrow \mu$  presque sûrement quand  $m \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 5.2 La structure du majorant concave de $S^{[0,n]}$ quand $n$ varie

Le Théorème 1 traite de la structure du majorant concave d'une marche aléatoire de longueur fixée, et les Théorèmes 7 et 9 concernent des longueurs aléatoires ou infinies. Cependant, nous n'avons pas étudié le changement de structure lorsque le nombre de pas de la marche augmente, mais le Théorème 9 et sa démonstration nous permettent de faire certains commentaires. Rappelons que  $F_n$  est le nombre de faces du majorant concave de  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$ , et dans le cas où  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et de même loi continue nous savons de (1) que pour tout  $n$  fixé nous avons l'égalité en loi

$$F_n \stackrel{d}{=} K_n := \sum_{j=1}^n I_j$$

où les  $I_j$  sont des variables indépendantes de Bernoulli avec  $\mathbb{P}(I_j = 1) = 1/j$ . Malgré cela, comme l'a observé Steele [33] l'égalité en loi entre  $F_n$  et  $K_n$  ne tient pas conjointement quand  $n$  varie. En effet, même si  $F_n \stackrel{d}{=} K_n$  pour tout  $n$ , les processus  $\{F_n : 1 \leq n \leq \infty\}$  et  $\{K_n : 1 \leq n \leq \infty\}$  ne sont certainement pas équivalents puisque  $K_1 \leq K_2 \leq \dots$  avec la probabilité 1, alors qu'aucune relation de monotonie ne peut être valide pour la suite  $\{F_n\}$ . Ceci entraîne que la loi des grands nombres pour  $K_n$ , soit  $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} K_n / \log n = 1) = 1$ , ne peut impliquer une loi des grands nombres correspondante pour  $F_n$ .

Une confirmation de la différence de comportement asymptotique de  $F_n$  et de  $K_n$  quand  $n \rightarrow \infty$  est apportée par Qiao et Steele [27]. Ils exhibent l'exemple d'une loi de  $X_i$  continue telle que

$$\mathbb{P}(F_n = m \text{ infiniment souvent}) = 1 \text{ pour tout } m = 1, 2, \dots$$

Or c'est une conséquence facile du Théorème 9 que

$$\mathbb{P}(F_n = 1 \text{ infiniment souvent}) = 1 \text{ si et seulement si } \mathbb{E}(X^+) = \infty$$

Steele [33] remarque également le résultat obtenu par Shepp et Lloyd [29] concernant  $\lambda_n$ , la longueur de la plus grande face,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\lambda_n] = \int_0^\infty \left[ -x - \int_x^\infty \frac{\exp(-y)}{y} \right] dy = 0.6243 \dots$$

qui était la valeur calculée approximativement par Golomb [17]. Or l'apparition régulière d'une longue face fait décroître brutalement le nombre  $F_n$ .

Il apparaît que l'analyse Poissonienne de  $F_{n(q)}$  peut être utilisée pour fournir une description plus complète du possible comportement asymptotique de  $F_n$  quand  $n$  varie. En particulier, comme conséquence du Lemme 10, si  $\mathbb{E}(X^+) < \infty$  alors  $F_n$  est borné inférieurement par le nombre de faces du majorant sur  $[0, n]$  qui forme une partie du majorant sur  $[0, \infty)$ , et ce nombre est croissant avec  $n$ , et a pour limite  $\infty$ .

### 5.3 Décomposition au maximum

Le Théorème 7 nous procure des outils pour analyser le comportement de la marche aléatoire  $S^{[0,n(q)]}$  avant et après l'instant où elle réalise son maximum. En conditionnant par  $n(q) = n$ , nous pouvons traiter de la même manière  $S^{[0,n]}$ . L'idée clé est qu'en considérant les faces du majorant concave qui ont une pente positive nous obtenons seulement les faces situées avant et jusqu'à ce que la marche aléatoire réalise son maximum, et en considérant les faces de pente négative nous obtenons seulement les faces situées après l'instant où la marche aléatoire réalise son maximum. Cette approche a été utilisée par Spitzer pour découvrir des égalités impliquant le maximum d'une marche aléatoire [32], comme cela est indiqué dans la Partie 1.

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi continue, et soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $j \geq 1$ . Soit  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$  et  $S^{[0,n(q)]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n(q)\}$ . Soit  $L_n$  l'instant presque sûrement unique auquel  $S^{[0,n]}$  réalise son maximum, et soit  $M_n$  la valeur de ce maximum. Soit  $F_n$  le nombre de faces du majorant concave de la marche  $S^{[0,n]}$ , avec la convention  $F_0 = 0$ , et soit  $(N_{n,i}, \Delta_{n,i})$  le couple longueur accroissement associé à la  $i$ -ème de ces faces. Nous posons des définitions similaires si  $n$  est rendu aléatoire et noté  $n(q)$ .

**Théorème 13.**  $(L_{n(q)}, M_{n(q)})$  et  $(n(q) - L_{n(q)}, S_{n(q)} - M_{n(q)})$  sont indépendants et suivent des lois de Poisson composées.

Comme cela a été discuté dans la Partie 1 la nature Poissonienne composée de  $M_{n(q)}$  et  $S_{n(q)} - M_{n(q)}$  et leur indépendance a été découverte par Greenwood et Pitman [19], mais cette partie donne une explication plus précise de leur loi.

**Démonstration.** Par construction

$$\Delta_{n,i} = S_{N_{n,1} + \dots + N_{n,i-1} + N_{n,i}} - S_{N_{n,1} + \dots + N_{n,i-1}}$$

et

$$\begin{aligned} (L_n, M_n) &= \sum_{i=1}^{K_n} (N_{n,i}, \Delta_{n,i}) 1(\Delta_{n,i} > 0) \\ (n - L_n, S_n - M_n) &= \sum_{i=1}^{K_n} (N_{n,i}, \Delta_{n,i}) 1(\Delta_{n,i} \leq 0) \end{aligned}$$

Le Théorème 7 entraîne que  $(N_{n(q),i}, \Delta_{n(q),i})$  sont les points d'un processus ponctuel de Poisson sur  $\{1, 2, \dots\} \times \mathbb{R}$  d'intensité  $j^{-1} q^j \mathbb{P}(S_j \in dx)$ ,  $j \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , et ainsi la conclusion s'ensuit.  $\square$

En conditionnant par l'événement  $n(q) = n$  et  $L_{n(q)} = \ell$  nous pouvons en déduire des résultats concernant le majorant concave de  $S^{[0,n]}$  de chaque côté de son maximum.

**Théorème 14.** Soit  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et de même loi continue. Soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $1 \leq j \leq n$ , et soit  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$ .

Supposons que  $\mathbb{P}(S_j > 0) = p_+$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Alors conditionnellement à  $L_n := \arg \max_{0 \leq j \leq n} S_j = \ell$ , la partition générée par les longueurs des faces du majorant concave de  $S^{[0,n]}$  sur l'intervalle  $[0, \ell]$  suit une loi correspondant à la formule d'échantillonnage de Ewens de paramètre  $p_+$ . C'est-à-dire que, si  $A_j^+$  est le nombre de faces du majorant concave ayant des pentes positives de longueur  $j$ , alors pour tout  $\{a_j : j \geq 1\}$  tel que  $\sum_j j a_j = \ell \leq n$ ,

$$\mathbb{P}(A_j^+ = a_j, j \geq 1 | L_n = \ell) = \frac{\Gamma(p_+) \ell!}{\Gamma(p_+ + \ell)} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{(p_+)^{a_j}}{j^{a_j} a_j!} \quad (15)$$

La partition générée par les longueurs des faces du majorant concave de  $S^{[0,n]}$  sur l'intervalle  $[\ell, n]$  suit aussi une loi correspondant à la formule d'échantillonnage de Ewens de paramètre  $p_- = 1 - p_+$ .

**Démonstration.** Soit  $A_{n(q),j}^+$  le nombre de faces du majorant concave de  $S^{[0,n(q)]}$  ayant des pentes positives de longueur  $j$ . A partir de la démonstration du Théorème 13 il est facile de voir que  $A_{n(q),j}^+$  suit une loi de Poisson de paramètre  $j^{-1} q^j p_+$ , indépendamment pour tout  $j$ , et indépendamment de  $S^{[0,n(q)]}$  après l'instant  $L_{n(q)}$ . Alors pour tout  $\{a_j : j \geq 1\}$  tel que  $\sum_j j a_j = \ell$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_j^+ = a_j, j \geq 1 | L_n = \ell) &= \mathbb{P}(A_{n(q),j}^+ = a_j, j \geq 1 | L_{n(q)} = \ell, n(q) = n) \\ &= \mathbb{P}(A_{n(q),j}^+ = a_j, j \geq 1 | L_{n(q)} = \ell) \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_{n(q),j}^+ = a_j, j \geq 1)}{\mathbb{P}(L_{n(q)} = \ell)} \\ &= \frac{\prod_j \frac{(p_+)^{a_j} q^{j a_j}}{j^{a_j} a_j!} \exp\{-\frac{p_+ q^j}{j}\}}{\mathbb{P}(L_{n(q)} = \ell)} \end{aligned} \quad (16)$$

Or  $\prod_j q^{j a_j} = q^\ell$  et  $\prod_j \exp\left(-\frac{p_+ q^j}{j}\right) = \exp\left(-p_+ \sum_j \frac{q^j}{j}\right) = (1 - q)^{p_+}$ .

$$\text{Donc : } \mathbb{P}(A_j^+ = a_j, j \geq 1 | L_n = \ell) = \frac{q^\ell (1 - q)^{p_+}}{\mathbb{P}(L_{n(q)} = \ell)} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{(p_+)^{a_j}}{j^{a_j} a_j!}$$

Il reste à déterminer  $\mathbb{P}(L_{n(q)} = \ell)$

Nous savons [13, Chapter XII, (8.12)] que pour la marche aléatoire  $S^{[0,n]}$ , l'indice presque sûrement unique  $L_n$  tel que  $S_{L_n} = \max_{0 \leq j \leq n} S_j$  suit la loi beta-binomiale

$$\mathbb{P}(L_n = \ell) = (-1)^n \binom{p_- - 1}{\ell} \binom{p_+ - 1}{n - \ell} \quad (0 \leq \ell \leq n)$$

qui est un mélange de loi binomiale  $(n, p)$  avec  $p$  suivant la loi beta  $(p_+, p_-)$  sur  $[0, 1]$ .

Ceci repose sur un résultat découvert par Sparre Andersen, à savoir que  $\tau(s)$ , la fonction génératrice des  $\tau_n = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0, S_n > 0)$ , vérifie

$$\log \frac{1}{1 - \tau(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{P}(S_n > 0)$$

Ensuite, si  $p(s)$  est la fonction génératrice des probabilités  $p_n = \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_n > 0)$  alors  $p(s) = \frac{1}{1 - \tau(s)}$ , ce qui donne  $\log p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{P}(S_n > 0)$  et par symétrie, si  $q(s)$  est la fonction génératrice des probabilités  $q_n = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_n \leq 0)$ , nous avons  $\log q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{P}(S_n \leq 0)$

Alors, si  $\mathbb{P}(S_j > 0) = p_+$  pour  $1 \leq j \leq n$ , nous obtenons  $\log p(s) = -p_+ \log(1 - s)$  soit  $p(s) = (1 - s)^{-p_+}$  et de même  $q(s) = (1 - s)^{p_+ - 1}$ .

Il ne reste plus qu'à écrire  $\mathbb{P}(L_n = \ell) = p_\ell q_{n-\ell}$ .

Nous pouvons terminer maintenant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_{n(q)} = \ell) &= \sum_n \mathbb{P}(L_n = \ell, n(q) = n) \\ &= \frac{\Gamma(p_+ + \ell)}{\Gamma(p_+) \ell!} \sum_n (-1)^{n-\ell} \binom{p_+ - 1}{n - \ell} q^n (1 - q) \\ &= \frac{\Gamma(p_+ + \ell)}{\Gamma(p_+) \ell!} q^\ell \sum_n \binom{p_+ - 1}{n - \ell} (-q)^{n-\ell} (1 - q) \\ &= \frac{\Gamma(p_+ + \ell) q^\ell (1 - q)^{p_+}}{\Gamma(p_+) \ell!} \end{aligned}$$

Donc (16) se réduit à (15). Pour la partition après le maximum la démonstration est similaire.  $\square$

## 6 Le cas général

Soit  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $1 \leq j \leq n$ , où  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires échangeables. Soit  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 1 \leq j \leq n\}$ , et soit  $\bar{C}^{[0,n]}$  le majorant concave de  $S^{[0,n]}$ . Dans le cas où des sous-ensembles de  $X_1, \dots, X_n$  peuvent avoir la même moyenne arithmétique, le majorant concave est moins bien étudié. Malgré cela, la littérature contient quelques résultats dans le cas où  $X_1, X_2, \dots$  sont supposées être aussi indépendantes.

Sparre Andersen [1] a introduit la variable aléatoire  $H_n$ , le nombre  $1 \leq j \leq n$  tel que  $S_j = \bar{C}^{[0,n]}(j)$ , et  $F_n$ , le nombre de faces du majorant concave, c'est-à-dire le nombre de pentes distinctes du majorant concave (remarquons que Andersen utilise la notation  $K_n$  à la place de  $F_n$ , mais nous utiliserons

toujours  $K_n$  pour représenter le nombre de cycles d'une permutation aléatoire de  $[n]$ ). La Figure 4 montre l'exemple d'une marche aléatoire avec  $F_n = 3$  et  $H_n = 8$ . Clairement,  $F_n \leq H_n$ , et dans le cas de lois continues nous avons presque sûrement  $F_n = H_n$ . Sparre Andersen a déduit la fonction génératrice

$$H(s, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \mathbb{P}(H_n = m) s^n t^m \quad (17)$$

pour toute loi de  $X_1$ . Comme nous le montrerons dans le Théorème 19 la théorie présentée dans cette partie procure une méthode puissante pour déduire cette formule, avec en plus une formule similaire pour la fonction génératrice impliquant  $F_n$ .

Sherman [30] a introduit une variable supplémentaire  $J_n$  en relation avec le majorant concave, telle que  $F_n \leq J_n \leq H_n$ . Une face qui est caractérisée par sa pente peut être constituée d'une ou plusieurs parties dont les extrémités sont des points de la marche qui appartiennent au majorant concave. Si les variables  $X_i$  suivent la même loi continue, une face est presque sûrement constituée d'une seule partie. Dans le cas contraire, pour partager une face en plusieurs parties, Sherman utilise la notion d'alphabet et de mots ordonnés par l'ordre lexicographique, et un mot constituant une face est factorisé en mots standards définissant les différentes parties. La variable  $J_n$  compte le nombre de mots standards. Sherman introduit alors la variable  $\pi_n$ , qui compte le nombre de périodes de  $(X_1, \dots, X_n)$ , c'est-à-dire le nombre maximal  $\pi$  tel que  $(X_1, \dots, X_n) = (X_1, \dots, X_{n/\pi}, \dots, X_1, \dots, X_{n/\pi})$  et déduit une identité de Spitzer qui relie les fonctions caractéristiques  $\Phi_n(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(i\lambda J_n))$  de la variable  $J_n$  et  $\Psi_n(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(i\lambda \pi_n))$  de la variable  $\pi_n$ . Soit pour  $\lambda$  réel et  $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\lambda) t^n = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\lambda) t^k / k$$

Dans cette partie il sera important de bien faire la distinction entre *excursions*, *segments* et *faces*, et entre les compositions de  $n$  associées. Les définitions suivantes sont illustrées par la Figure 4.

- Une *excursion* est une partie de la marche entre deux instants de valeurs entières avec la propriété que la marche touche son majorant concave aux points extrêmes de l'excursion mais reste strictement en-dessous entre ces points. Le nombre d'excursions distinctes de  $S^{[0,n]}$  est égal à  $H_n$ . Soit  $\Xi_{[0,n]}^H$  la composition de  $n$  induite par les longueurs des excursions de  $S_\rho^{[0,n]}$ , la marche transformée du Théorème 1. Bien qu'elle ait la même loi que la composition induite par les longueurs des excursions de  $S^{[0,n]}$ , la discussion à venir à propos des compositions en *segment* n'a de sens que pour  $S_\rho^{[0,n]}$ . Nous dirons que la *pente* d'une excursion est la pente de la droite joignant ses points extrêmes.

- Un *segment* se rapporte toujours à un segment d'une partition. C'est-à-dire, si  $(n_1, \dots, n_k)$  est une partition de  $n$  nous dirons alors qu'elle a  $k$  segments de longueurs associées  $n_1, \dots, n_k$ . Comme nous l'avons décrit dans l'introduction, pour générer une marche qui suit la loi de  $S^{[0,n]}$  en obtenant simultanément des informations sur son majorant concave, c'est-à-dire pour générer  $S_\rho^{[0,n]}$ , nous choisissons d'abord une partition aléatoire induite par les longueurs des cycles d'une permutation aléatoire uniforme. Si nous sommes seulement intéressés par le majorant concave de  $S_\rho^{[0,n]}$ , alors nous avons juste besoin d'associer une pente à chaque segment de cette partition et ensuite ranger les segments dans l'ordre des pentes décroissantes au sens large, où le rangement de tous les segments de même pente est choisi de manière aléatoire uniforme. En gardant la trace des points extrêmes des segments nous obtenons une autre composition induite de  $n$ , que nous appelons  $\Xi_{[0,n]}^K$ . Cette composition apparaît dans notre construction et ne peut se voir sur une marche aléatoire donnée.
- Une *face* signifiera une face du majorant concave. Le nombre de faces distinctes est égal à  $F_n$ . Soit  $\Xi_{[0,n]}^F$  la composition de  $n$  induite par les longueurs des faces de  $S_\rho^{[0,n]}$ . A nouveau, celle-ci suit la même loi que la composition de  $n$  induite par les longueurs des faces de  $S^{[0,n]}$ .
- Les termes *bloc excursion*, *bloc segment* et *bloc face* signifieront les blocs des compositions  $\Xi_{[0,n]}^H$ ,  $\Xi_{[0,n]}^K$  et  $\Xi_{[0,n]}^F$  respectivement, où par exemple les *blocs* de la composition  $(3, 4, 1)$  de 8 dans l'ordre sont définis par  $[0, 3]$ ,  $[3, 7]$  et  $[7, 8]$ . La pente associée à chaque bloc  $[a, b]$  est définie par  $(S_b^\rho - S_a^\rho)/(b - a)$ .

Puisque les valeurs d'une marche sur  $[0, n]$  entre deux sommets de son majorant concave, c'est-à-dire entre les points extrêmes d'une face, sont composées d'une ou plusieurs excursions consécutives,  $\Xi_{[n]}^H$  est un raffinement de  $\Xi_{[n]}^F$ , ce que nous écrivons ainsi  $\Xi_{[n]}^H \preceq \Xi_{[n]}^F$ . Pour  $S_\rho^{[0,n]}$  construite comme dans le Théorème 1, définissons  $H_n^\rho$  et  $F_n^\rho$  de manière similaire à  $H_n$  et  $F_n$ , et remarquons que  $H_n \stackrel{d}{=} H_n^\rho$  et  $F_n \stackrel{d}{=} F_n^\rho$ . Rappelons que  $K_n$  est le nombre de segments dans la partition choisie au début de la construction. Nous avons  $F_n^\rho \leq K_n \leq H_n^\rho$ , et de plus  $\Xi_{[0,n]}^K$  est tel que  $\Xi_{[0,n]}^H \preceq \Xi_{[0,n]}^K \preceq \Xi_{[0,n]}^F$ . Nous allons discuter de ces compositions emboîtées plus loin après avoir démontré le Théorème 1 dans le cas général.

**Démonstration. (Théorème 1)** Comme dans la démonstration du Théorème 1 sous l'hypothèse **A**, il est suffisant de montrer que si  $X_1, \dots, X_n$  sont les tirages sans remise d'une liste  $x_1, \dots, x_n$  de nombres réels, où maintenant tous les nombres portent une étiquette mais ne sont plus nécessairement de valeurs distinctes, alors

$$\mathbb{P}(X_{\rho(1)} = x_1, \dots, X_{\rho(n)} = x_n) = \frac{1}{n!}$$



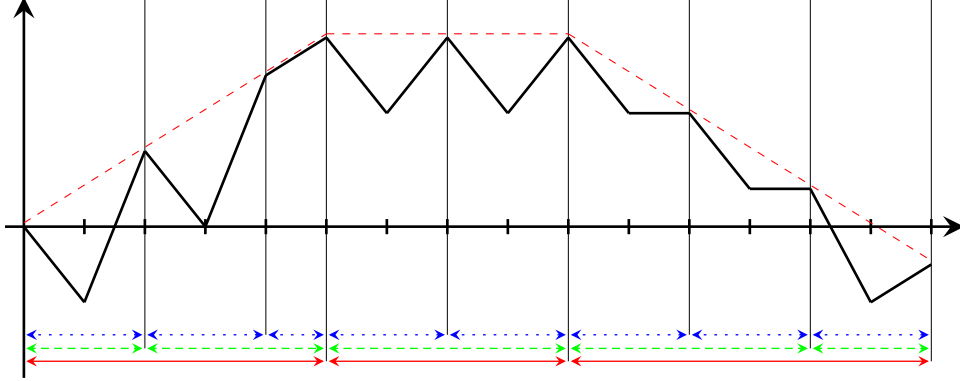


FIG. 4: Un exemple de marche aléatoire avec une loi des accroissements non-continue pour  $n = 15$ , avec  $F_n = 3$  et  $H_n = 8$ . Le majorant concave est représenté en pointillés. Les compositions induites par les longueurs des excursions et les longueurs des faces sont déterminées par les valeurs de la marche, et nous avons un exemple d'une possible composition induite par les longueurs des cordes associée à la partition en segments. Les compositions sont dans l'ordre  $\Xi_{[0,15]}^H = (2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, )$ ,  $\Xi_{[0,15]}^K = (2, 3, 4, 4, 2)$  et  $\Xi_{[0,15]}^F = (5, 4, 6)$ .

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , et supposons  $x$  fixé pour toute la démonstration du théorème. Soit  $\bar{c}^{[0,n]}$  le majorant concave de la marche déterministe d'accroissements  $x_1, \dots, x_n$ . Quelques notations et deux lemmes combinatoires sont nécessaires avant de continuer.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\mathcal{N}_n$  l'ensemble de toutes les compositions de  $n$ . Soit  $f \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathbb{N}$  et  $(v_1, \dots, v_f) \in \mathcal{N}_h$ . Soit  $\mathcal{N}_{(v_1, \dots, v_f), (k_1, \dots, k_f)}$  l'ensemble

$$\{(h_1, \dots, h_{\sum_{i=1}^f k_i}) \in \mathcal{N}_h : (h_{\sum_{i=1}^{j-1} k_i + 1}, \dots, h_{\sum_{i=1}^j k_i}) \in \mathcal{N}_{v_j} \text{ pour } 1 \leq j \leq f\}$$

Donc un élément de  $\mathcal{N}_{(v_1, \dots, v_f), (k_1, \dots, k_f)}$  est une composition de  $h$  formée en joignant ensemble les compositions de  $v_1, \dots, v_f$  qui contiennent  $k_1, \dots, k_f$  blocs respectivement (et donc  $\mathcal{N}_{(v_1, \dots, v_f), (k_1, \dots, k_f)}$  peut être un ensemble vide pour certaines valeurs de  $(k_1, \dots, k_f)$ ).

**Lemme 15.** Soit  $f \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathbb{N}$  et  $(v_1, \dots, v_f) \in \mathcal{N}_h$ . Alors

$$\sum_{k=f}^h \sum_{(k_1, \dots, k_f) \in \mathcal{N}_k} \sum_{(h_1, \dots, h_k) \in \mathcal{N}_{(v_1, \dots, v_f), (k_1, \dots, k_f)}} \frac{1}{k_1! \cdots k_f!} \frac{1}{h_1 \cdots h_k} = 1 \quad (18)$$

**Démonstration.** Les nombres sommés ci-dessus présentent une forte ressemblance avec les nombres de Stirling non signés de première espèce  $|S(n, k)|$ , qui énumèrent le nombre de permutations de  $[n]$  avec  $k$  cycles. Utilisant ce

guide, considérons un ensemble  $A$  des permutations de  $[v_1], \dots, [v_f]$ , où les permutations correspondant à  $v_i$  et  $v_j$  avec  $i \neq j$  sont considérées distinctes même si elles sont identiques. Le nombre de tels ensembles où pour tout  $1 \leq j \leq f$  la permutation de  $[v_j]$  a  $k_j$  cycles de tailles  $h_{\sum_{i=1}^{j-1} k_{i+1}}, \dots, h_{\sum_{i=1}^j k_i}$  est

$$\frac{v_1! \cdots v_f!}{k_1! \cdots k_f! \cdot h_1 \cdots h_k}$$

Puisque le nombre total d'éléments de  $A$  est  $v_1! \cdots v_f!$ , et que la sommation dans (18) se simplifie en la somme sur les sous-ensembles de  $A$  tels que pour tout  $1 \leq j \leq f$  la permutation de  $[v_j]$  a  $k_j$  cycles de tailles  $h_{\sum_{i=1}^{j-1} k_{i+1}}, \dots, h_{\sum_{i=1}^j k_i}$ , la valeur de cette somme doit être 1.  $\square$

Soit  $f(\bar{c}^{[0,n]})$  le nombre de faces de  $\bar{c}^{[0,n]}$ , et soit  $\ell_1(\bar{c}^{[0,n]}), \dots, \ell_{f(\bar{c}^{[0,n]})}(\bar{c}^{[0,n]})$  les longueurs de ces faces, rangées dans l'ordre d'apparition dans  $\bar{c}^{[0,n]}$ . Soit  $\mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]})$  l'ensemble

$$\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}_n : \exists k_1 < \dots < k_{f(\bar{c}^{[0,n]})} \text{ tels que } \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} n_i = \ell_j(\bar{c}^{[0,n]}), 1 \leq j \leq f(\bar{c}^{[0,n]})\}$$

Sans être trop précis, nous pouvons dire que  $\mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]})$  est l'ensemble des valeurs possibles pour  $\Xi_{[0,n]}^K$  conditionnellement au fait que le majorant concave de  $S_\rho^{[0,n]}$  est  $\bar{c}^{[0,n]}$ . Pour  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]})$ , soit

$$\{k_j(n_1, \dots, n_k), 1 \leq j \leq f(\bar{c}^{[0,n]})\} = \{(k_1, \dots, k_{f(\bar{c}^{[0,n]})}) : \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} n_i = \ell_j(\bar{c}^{[0,n]})\}$$

Alors  $k_j(\Xi_{[0,n]}^K)$  représente le nombre de blocs de  $\Xi_{[0,n]}$  situés sur le  $j$ -ième bloc face, c'est-à-dire sur le  $j$ -ième bloc de  $\Xi_{[0,n]}^F$ . Finalement, soit

$$\mathcal{N}_x(\bar{c}^{[0,n]}) = \{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]}) : \sum_{j=1}^{n_i} x_j = \bar{c}^{[0,n]}(n_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq k\}$$

Alors  $\mathcal{N}_x(\bar{c}^{[0,n]})$  est l'ensemble des valeurs possibles pour  $\Xi_{[0,n]}^K$  conditionné par  $\{X_{\rho(i)} = x_i : 1 \leq i \leq n\}$ .

**Lemme 16.** *Pour toute composition  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}_x(\bar{c}^{[0,n]})$ , pour  $1 \leq i \leq k$  soit*

$$h_i(x, n_1, \dots, n_k) = \#\{j : n_1 + \dots + n_{i-1} < j \leq n_1 + \dots + n_i, \sum_{l=1}^j x_l = \bar{c}^{[0,n]}(j)\}$$

Alors

$$\sum_{k=1}^n \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}_x(\bar{c}^{[0,n]})} \left( \prod_{i=1}^k \frac{1}{h_i(x, n_1, \dots, n_k)} \right) \left( \prod_{j=1}^{f(\bar{c}^{[0,n]})} \frac{1}{k_j(n_1, \dots, n_k)!} \right) = 1 \quad (19)$$

**Démonstration.** Soit  $h = \#\{j : 1 \leq j \leq n, \sum_{l=1}^j = \bar{c}^{[0,n]}(j)\}$  et pour  $1 \leq i \leq f(\bar{c}^{[0,n]})$  soit

$$v_i(x) = \#\{j : \ell_1(\bar{c}^{[0,n]}) + \dots + \ell_{i-1}(\bar{c}^{[0,n]}) < j \leq \ell_1(\bar{c}^{[0,n]}) + \dots + \ell_i(\bar{c}^{[0,n]}), \sum_{l=1}^j x_l = \bar{c}^{[0,n]}(j)\}$$

Associons à chaque composition  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}_x(\bar{c}^{[0,n]})$  de longueur  $k$  une composition de  $h$

$$(h_1(x, n_1, \dots, n_k), h_2(x, n_1, \dots, n_k), \dots, h_k(x, n_1, \dots, n_k))$$

ainsi il existe une bijection entre les éléments de  $\mathcal{N}_x(\bar{c}^{[0,n]})$  avec  $k$  blocs et l'ensemble des compositions  $(h_1, \dots, h_k)$  de  $h$  avec  $k$  blocs qui sont formées en joignant ensemble dans l'ordre les compositions de  $v_1, \dots, v_{f(\bar{c}^{[0,n]})}$  qui ont  $k_1, \dots, k_{f(\bar{c}^{[0,n]})}$  blocs respectivement. Donc le terme du membre de gauche de (19) est

$$\sum_{k=f}^h \sum_{(k_1, \dots, k_{f(\bar{c}^{[0,n]})}) \in \mathcal{N}_k} \sum_{(h_1, \dots, h_k) \in \mathcal{N}_{(v_1, \dots, v_{f(\bar{c}^{[0,n]})}, (k_1, \dots, k_{f(\bar{c}^{[0,n]})})} \frac{1}{k_1! \dots k_{f(\bar{c}^{[0,n]})!}} \frac{1}{h_1 \dots h_k}$$

ce qui d'après le Lemme 15 est égal à 1.  $\square$

Fixons une composition  $(n_1, \dots, n_k)$  de  $n$ . Pour  $1 \leq j \leq n$  soit  $I_j = \{i : n_i = j\}$  et soit  $a_j = |I_j|$ . En suivant la construction de  $S_\rho^{[0,n]}$  décrite dans l'introduction, nous voyons que l'événement  $\{\Xi_{[0,n]}^K = (n_1, \dots, n_k) \text{ et } X_{\rho(\ell)} = x_\ell, 1 \leq \ell \leq n\}$  se réalise si et seulement si

- (i)  $L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}$  représentent  $(n_1, \dots, n_k)$  dans l'ordre décroissant au sens large ;
- (ii) pour tout  $1 \leq j \leq n$  et pour tout  $i \in I_j$ , la liste ordonnée  $(X_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, X_{n_1+\dots+n_i})$  est l'une des  $n_i = j$  permutations cycliques de la liste ordonnée  $(x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i')-1}+1}, \dots, x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i')}})$  pour un  $i' \in I_j$  ;
- (iii) pour tout  $1 \leq j \leq n$ , pour tout  $i \in I_j$  la permutation cyclique choisie pour la liste ordonnées des accroissements  $(X_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, X_{n_1+\dots+n_i})$  est l'unique permutation cyclique qui produit la liste ordonnée devenant exactement  $(x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i')-1}+1}, \dots, x_{m_1+m_2+\dots+m_{\tau(i')}})$  ;
- (iv) pour tout  $1 \leq j \leq f(\bar{c})^{[0,n]}$  l'ordre de rangement des  $k_j(n_1, \dots, n_k)$  segments de la  $j$ -ième face est choisi correctement parmi les  $k_j!$  rangements possibles.

Rappelons que pour tout  $1 \leq i \leq k$  nous avons

$$h_i(x, n_1, \dots, n_k) = \#\{j : n_1 + \dots + n_{i-1} < j \leq n_1 + \dots + n_i, \sum_{l=1}^j x_l = \bar{c}^{[0,n]}(j)\}$$

ainsi dans (iii) il existe  $\prod_{i=1}^k h_i(x, n_1, \dots, n_k)$  choix possibles de combinaisons de permutations cycliques. Alors la probabilité de l'événement  $\{\Xi_{[0,n]}^K = (n_1, \dots, n_k) \text{ et } X_{\rho(\ell)} = x_\ell, 1 \leq \ell \leq n\}$  est

$$\left( \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j!} \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \right) \left( \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^k n_i \prod_{j=1}^n a_j! \right) \left( \prod_{i=1}^k \frac{1}{h_i(x, n_1, \dots, n_k)} \right) \left( \prod_{j=1}^{f(\bar{c}^{[0,n]})} \frac{1}{k_j(n_1, \dots, n_k)!} \right)$$

où les deux premiers termes nous sont familiers depuis la démonstration du Théorème 1 sous l'hypothèse **A**. Finalement, en sommant cette probabilité sur toutes les compositions possibles, nous obtenons la probabilité de l'événement  $\{X_{\rho(\ell)} = x_\ell, 1 \leq \ell \leq n\}$ , soit

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}_x(\bar{c}^{[0,n]})} \left( \prod_{i=1}^k \frac{1}{h_i(x, n_1, \dots, n_k)} \right) \left( \prod_{j=1}^{f(\bar{c}^{[0,n]})} \frac{1}{k_j(n_1, \dots, n_k)!} \right) = \frac{1}{n!}$$

où l'égalité provient du Lemme 16. Ceci termine la démonstration du Théorème 1.  $\square$

Dans le cas où les  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendantes, les idées du processus ponctuel de Poisson de la Partie 4 conduisent à une description plus simple du majorant concave. Pour le reste de cette partie nous supposons que  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi et  $n(q)$  est une variable aléatoire géométrique de paramètre  $1 - q$ . Soit  $S^{[0, n(q)]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n(q)\}$ , où  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $j \geq 1$ . Soit  $\bar{C}^{[0, n(q)]}$  le majorant concave de  $S^{[0, n(q)]}$ . Le théorème suivant est l'extension du Théorème 7 au cas des accroissements non-continus.

**Théorème 17.** *Si  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendantes et de même loi et  $n(q)$  est une variable aléatoire géométrique de paramètre  $1 - q$ , alors les longueurs et les accroissements des faces du majorant concave de la marche aléatoire  $S^{[0, n(q)]}$  suivent la loi suivante. Soit  $\mathfrak{P}$  un processus ponctuel de Poisson sur  $\{1, 2, \dots\} \times \mathbb{R}$  d'intensité  $j^{-1}q^j \mathbb{P}(S_j \in dx)$  pour  $j = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}$ . Remarquons que ce processus peut produire plusieurs points au même endroit. Chaque point de  $\mathfrak{P}$  représente la longueur et l'accroissement d'une corde associée à un segment d'une partition de  $n(q)$ . Les cordes de même pente sont jointes ensemble dans un ordre aléatoire uniforme, indépendamment de leurs longueurs, pour former les faces du majorant concave. De plus, soit  $K_{n(q)}$  le nombre total de cordes associées à une partition en segments et pour  $1 \leq i \leq K_{n(q)}$  soit  $N_{n(q), i}$  la longueur de la  $i$ -ième corde lorsqu'elles ont été rangées dans l'ordre des pentes décroissantes et dans un ordre aléatoire uniforme en cas d'égalité des pentes. Alors la suite des segments*

$$\left\{ \left( S_{\sum_{l=1}^{i-1} N_{n(q), l} + k} - S_{\sum_{l=1}^{i-1} N_{n(q), l}}, 1 \leq k \leq N_{n(q), i} \right), i = 1, \dots, K_{n(q)} \right\}$$

est une liste de points d'un processus ponctuel de Poisson dans l'espace des segments d'une marche aléatoire finie

$$\{(s_1, \dots, s_j) \text{ pour certains } j = 1, 2, \dots\}$$

donc l'intensité sur les chemins de longueur  $j$  est le produit de  $j^{-1}q^j$  par la loi conditionnelle de  $(S_1, \dots, S_j)$  sachant que  $S_k < (k/j)S_j$  pour tout  $1 \leq k < j$ . A nouveau, ce processus ponctuel de Poisson peut produire plusieurs points au même endroit.

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , conditionnellement à  $n(q) = n$ , la projection des points de  $\mathfrak{P}$  sur  $\{1, \dots, n\}$  suit la loi d'une partition de  $n$  générée par les longueurs des cycles d'une permutation aléatoire de  $[n]$  par le Lemme 6. Ensuite nous savons du Théorème 1 que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , conditionnellement à  $n(q) = n$ , le processus décrit dans le théorème donne la bonne loi du majorant concave de  $S^{[0,n]}$  et donne la bonne loi de  $\Xi_{[0,n]}^K$ , la composition induite par les longueurs des segments de la partition impliquée dans la création de  $S_\rho^{[0,n]}$ . Les assertions restantes s'ensuivent par l'indépendance des marches associées à chaque partition en segments.  $\square$

Nous allons maintenant décrire la loi jointe des compositions emboîtées  $\Xi_{[0,n(q)]}^H \preceq \Xi_{[0,n(q)]}^K \preceq \Xi_{[0,n(q)]}^F$  dans le cas où  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendantes et la marche a une longueur aléatoire géométrique. La description complète de cette loi sera donnée dans le Théorème 22 à la fin de cette partie, accompagnée de quelques applications de la théorie. Soit  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  telle que conditionnellement à  $n(q) = n$ ,  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  est construite de la même manière que  $S_\rho^{[0,n]}$  dans le Théorème 1, et soit  $\bar{C}_\rho^{[0,n(q)]}$  le majorant concave de  $S_\rho^{[0,n(q)]}$ . Nous commençons par décrire les lois de  $H_{n(q)}$ ,  $K_{n(q)}$  et  $F_{n(q)}$ , qui par définition sont les nombres d'excursions, de segments et de faces respectivement de  $\bar{C}_\rho^{[0,n(q)]}$ .

Nous avons besoin de quelques nouvelles notations, dont certaines sont prises chez Sparre Andersen [1]. Soit  $x_1, x_2, \dots$  une énumération de l'ensemble des nombres réels  $x$  pour lesquels  $\mathbb{P}(S_k = kx)$  est positive pour un  $k > 0$ , et soit

$$\begin{aligned} \mu_j(q) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} q^k \mathbb{P}(S_k = kx_j), \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots \\ \mu_0(q) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} q^k \mathbb{P}(S_k \neq kx_j \text{ pour } j = 1, 2, \dots) \\ &= -\log(1 - q) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(q) \end{aligned}$$

**Proposition 18.** Soit  $H_{q,j}$ ,  $K_{q,j}$  et  $F_{q,j}$  le nombre d'excursions, de segments et de faces de  $\bar{C}_\rho^{[0,n(q)]}$  de pente  $x_j$  pour  $j \geq 1$ . Alors pour tout  $j \geq 1$

- (i)  $H_{q,j}$  est une variable aléatoire géométrique de paramètre  $\exp(-\mu_j(q))$ , indépendamment de  $\{H_{q,i} : i \neq j\}$ .
- (ii)  $K_{q,j}$  est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\mu_j(q)$ , indépendamment de  $\{K_{q,i} : i \neq j\}$ .
- (iii)  $F_{q,j}$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $1 - \exp(-\mu_j(q))$ , indépendamment de  $\{F_{q,i} : i \neq j\}$ .

Soit  $H_{q,0}$ ,  $K_{q,0}$  et  $F_{q,0}$  le nombre d'excursions, de segments et de faces de pente différentes de  $x_j$  pour tout  $j \geq 1$ . Alors

- (iv)  $H_{q,0} = K_{q,0} = F_{q,0}$  presque sûrement et leur loi commune est une loi de Poisson de paramètre  $\mu_0(q)$ , indépendamment de  $\{H_{q,j}, K_{q,j}, F_{q,j} : j \geq 1\}$ .

**Démonstration.** (ii) provient du Théorème 17 ; précisons que  $k^{-1}q^k$  est le nombre moyen de segments de longueur  $k$  et  $k^{-1}q^k\mathbb{P}(S_k = kx_j)$  est le nombre moyen de segments de longueur  $k$  et de pente  $x_j$ , enfin  $\mu_j(q)$  est le nombre moyen de segments de pente  $x_j$ . (iii) est impliquée par (ii) puisqu'une face de pente  $x$  existe si et seulement si il existe au moins un segment de pente  $x$ ;  $F_{q,j}$  ne prend que les valeurs 0 ou 1 et  $\mathbb{P}(F_{q,j} = 1) = 1 - \mathbb{P}(K_{q,j} = 0) = 1 - \exp(-\mu_j(q))$ . (iv) est impliqué aussi par le Théorème 17 puisque cela concerne la restriction du processus ponctuel de Poisson aux pentes de probabilité nulle, comme dans le cas d'accroissements de loi continue.

Remarquons que dans le cas d'accroissements de loi continue,  $\mu_j(q) = 0$  pour tout  $j = 1, 2, \dots$  et  $\mu_0(q) = -\log(1 - q)$ ; nous retrouvons le résultat du corollaire 8.

Fixons  $j \geq 1$ . (ii) implique que  $\mathbb{P}(H_{q,j} \geq 1) = \mathbb{P}(K_{q,j} \geq 1) = 1 - \exp(-\mu_j(q))$ . Sachant qu'il y a au moins  $n$  excursions de pente  $x_j$ , par la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique de  $n(q)$ , la loi des valeurs restantes de la marche  $S_\rho^{[0, n(q)]}$  est la même que la loi de la marche générée par le processus de Poisson des segments du Théorème 17 mais restreint aux seuls segments de pente  $x \leq x_j$ . Donc

$$\mathbb{P}(H_{q,j} \geq n + 1 | H_{q,j} \geq n) = \mathbb{P}(K_{q,j} \geq 1) = 1 - \exp(-\mu_j(q))$$

ce qui prouve (i).  $\square$

**Théorème 19.** Soit  $H_n$  et  $F_n$  le nombre d'excursions et de faces pour  $S^{[0, n]}$ , et soit  $K_n$  le nombre de segments pour  $S_\rho^{[0, n]}$ . Alors pour  $0 \leq s, t \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} H(s, t) &= e^{t\mu_0(s)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t + te^{-\mu_j(s)}} \\ K(s, t) &= e^{t\mu_0(s)} \prod_{j=1}^{\infty} e^{t\mu_j(s)} = (1 - s)^{-t} \\ F(s, t) &= e^{t\mu_0(s)} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - t + te^{\mu_j(s)}) \end{aligned}$$

La fonction génératrice  $G_{K_n}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} t^m \mathbb{P}(K_n = m)$  est bien connue à partir de l'égalité en loi (1).

$$G_{K_n}(t) = \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)\Gamma(n+1)}$$

d'où

$$K(s, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)\Gamma(n+1)} (-s)^n = (1-s)^{-t}$$

$H(s, t)$  est comme dans (17) et en accord avec la formule de Sparre Andersen [1, Théorème 2].

**Démonstration.** Rappelons d'abord que  $H_n^\rho \stackrel{d}{=} H_n$  et  $F_n^\rho \stackrel{d}{=} F_n$ . Soit  $n(s)$  une variable aléatoire géométrique de paramètre  $1-s$  et considérons la marche à  $n(s)$  pas. Nous avons par définition

$$H_{n(s)} = H_{s,0} + \sum_{j=1}^{\infty} H_{s,j}$$

Donc la fonction génératrice de  $H_{n(s)}$  est le produit des fonctions génératrices de  $H_{s,0}$  et  $H_{s,j}$ ,  $j \geq 1$ . Celles-ci sont connues de la Proposition 18, donc

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} t^m \mathbb{P}(H_{n(s)} = m) &= e^{(t-1)\mu_0(s)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j(s)}}{1-t+te^{-\mu_j(s)}} \\ &= (1-s)e^{t\mu_0(s)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-t+te^{-\mu_j(s)}} \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \mathbb{P}(H_n = m) s^n t^m \\ &= (1-s)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{n=m}^{\infty} (1-s)^n \mathbb{P}(H_n = m) \\ &= (1-s)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} t^m \mathbb{P}(H_{n(s)} = m) \\ &= e^{t\mu_0(s)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-t+te^{-\mu_j(s)}} \end{aligned}$$

La déduction pour  $F(s, t)$  est similaire.  $\square$

Afin de décrire complètement la loi des compositions emboîtées, deux lemmes supplémentaires sont nécessaires. Le premier contient des informations sur les longueurs de chaque segment ou excursion, et le second décrit le

nombre d'excursions contenues par chaque segment. Nous connaissons déjà de la description Poissonienne du majorant concave la loi du nombre de segments de pente donnée, et donc nous connaissons déjà la loi du nombre de segments contenus dans chaque face (voir le Théorème 22 pour une description complète).

**Lemme 20.** *Considérons la marche à  $n(q)$  pas. Pour  $j \geq 1$ , conditionnellement à  $K_{q,j} = k_{q,j}$ , soit  $L_{q,j,1}^K, \dots, L_{q,j,k_{q,j}}^K$  les longueurs des  $k_{q,j}$  segments de  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  de pente  $x_j$ . Alors  $L_{q,j,1}^K, \dots, L_{q,j,k_{q,j}}^K$  sont mutuellement indépendantes et sont indépendantes des longueurs de tous les autres segments. De plus elles suivent la même loi avec la même fonction génératrice des probabilités  $G_{L_{q,j}^K}(z) = \mu_j(zq)/\mu_j(q)$ .*

*Pour  $j \geq 1$ , conditionnellement à  $H_{q,j} = h_{q,j}$ , soit  $L_{q,j,1}^H, \dots, L_{q,j,h_{q,j}}^H$  les longueurs des  $h_{q,j}$  excursions de  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  de pente  $x_j$ . Alors  $L_{q,j,1}^H, \dots, L_{q,j,h_{q,j}}^H$  sont mutuellement indépendantes et sont indépendantes des longueurs de toutes les autres excursions. De plus elles suivent la même loi avec la même fonction génératrice des probabilités  $G_{L_{q,j}^H}(z) = (1 - e^{-\mu_j(zq)})/(1 - e^{-\mu_j(q)})$ .*

*En outre, chaque excursion sur la face de pente  $x_j$  est indépendante et suit la loi d'une marche aléatoire dont l'accroissement suit la loi de  $X_1$  conditionnée à faire son premier retour à la droite passant par l'origine, de pente  $x_j$  avant  $n(q)$ , variable aléatoire indépendante de loi géométrique de paramètre  $1 - q$ , et rester sous cette droite avant l'instant de son premier retour – l'excursion est définie par cette marche jusqu'à l'instant de son premier retour à la droite de pente  $x_j$ .*

**Démonstration.** Par les propriétés du processus de Poisson, les longueurs  $L_{q,j,1}^K, \dots, L_{q,j,h_{q,j}}^K$  sont mutuellement indépendantes et sont indépendantes des longueurs de tous les autres segments. En utilisant les processus de Poisson marqués,

$$\mathbb{P}(L_{q,j,1}^K = l) = \frac{l^{-1}q^l \mathbb{P}(S_k = kx_j)}{\mu_j(q)}$$

ce qui donne la fonction génératrice annoncée :

$$G_{L_{q,j}^K}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{-1}(zq)^l \mathbb{P}(S_k = kx_j)}{\mu_j(q)} = \mu_j(zq)/\mu_j(q)$$

Par la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique de  $n(q)$ , les excursions de pente  $x_j$  sont indépendantes, et sont clairement indépendantes de toutes les excursions de pentes différentes. Ceci nous donne l'assertion finale du Lemme. En considérant la longueur totale de la face de pente  $x_j$  nous voyons que

$$\sum_{i=1}^{H_{q,j}} L_{q,j,i}^H = \sum_{i=1}^{K_{q,j}} L_{q,j,i}^K$$



En comparant les fonctions génératrices des deux membres de l'égalité et en utilisant la Proposition 18 nous pouvons en déduire la fonction génératrice  $G_{L_{q,j}^H}(z)$ .

En effet,  $K_{q,j}$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu_j(q)$  et a donc pour fonction génératrice  $g_{q,j}^K(t) = \exp(\mu_j(q)(t-1))$ .

$L_{q,j,i}^K$  a pour fonction génératrice  $G_{L_{q,j}^K}(z) = \mu_j(zq)/\mu_j(q)$ .

Donc  $\sum_{i=1}^{K_{q,j}} L_{q,j,i}^K$  a pour fonction génératrice

$$g_{q,j}^K(G_{L_{q,j}^K}(z)) = \exp(\mu_j(zq) - \mu_j(q))$$

Ensuite,  $H_{q,j}$  suit une loi de géométrique de paramètre  $\exp(-\mu_j(q))$  et a donc pour fonction génératrice  $g_{q,j}^H(t) = \frac{\exp(-\mu_j(q))}{1 - t(1 - \exp(-\mu_j(q)))}$ .

$L_{q,j,i}^H$  a pour fonction génératrice  $G_{L_{q,j}^H}(z)$ .

Donc  $\sum_{i=1}^{H_{q,j}} L_{q,j,i}^H$  a pour fonction génératrice

$$g_{q,j}^H(G_{L_{q,j}^H}(z)) = \frac{\exp(-\mu_j(q))}{1 - G_{L_{q,j}^H}(z)(1 - \exp(-\mu_j(q)))}$$

nous pouvons en déduire

$$1 - G_{L_{q,j}^H}(z)(1 - \exp(-\mu_j(q))) = \exp(-\mu_j(zq))$$

et nous obtenons la fonction génératrice annoncée :

$$G_{L_{q,j}^H}(z) = \frac{1 - \exp(-\mu_j(zq))}{1 - \exp(-\mu_j(q))}$$

□

**Lemme 21.** *Conditionnellement à l'existence de  $k_{q,j}$  segments de  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  de pente  $x_j$ , soit  $E_{q,j,1}, \dots, E_{q,j,k_{q,j}}$  le nombre d'excursions sur chacun de ces  $k_{q,j}$  segments. Alors  $E_{q,j,1}, \dots, E_{q,j,k_{q,j}}$  sont mutuellement indépendantes, sont indépendantes de toutes les autres excursions et suivent la même loi. Leur loi commune est la loi log-séries de paramètre  $1 - e^{-\mu_j(q)}$ , soit*

$$\mathbb{P}(E_{q,j,1} = i) = \frac{(1 - e^{-\mu_j(q)})^i}{i\mu_j(q)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

**Démonstration.** Par le Théorème 17 les valeurs de la marche  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  sur chaque segment sont indépendantes, ce qui donne l'indépendance des  $E_{q,j,1}, \dots, E_{q,j,k_{q,j}}$ . Par l'indépendance des excursions sur la face de pente  $x_j$  et l'indépendance des marches sur chaque segment de pente  $x_j$ , les longueurs

$L_{q,j,1}^H, \dots, L_{q,j,E_{q,j}}^H$  sont indépendantes et de même loi. En considérant la longueur totale de chaque segment de pente  $x_j$ , nous avons l'égalité en loi

$$L_{q,j,1}^K \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{E_{q,j,1}} L_{q,j,1}^H$$

Quelques calculs sur les fonctions génératrices vont nous donner la réponse :  
L'égalité en loi ci-dessus entraîne :

$$G_{E_{q,j,1}} \left( G_{L_{q,j,1}^H}(t) \right) = G_{L_{q,j,1}^K}(t)$$

où

$$G_{E_{q,j,1}}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^i \mathbb{P}(E_{q,j,1} = i)$$

Utilisons le Lemme 20 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-\mu_j(tq)}}{1 - e^{-\mu_j(q)}} \right)^i \mathbb{P}(E_{q,j,1} = i) &= \frac{\mu_j(tq)}{\mu_j(q)} \\ &= \frac{-\log[1 - (1 - e^{-\mu_j(tq)})]}{\mu_j(q)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\mu_j(tq)})^i}{i\mu_j(q)} \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire :

$$\mathbb{P}(E_{q,j,1} = i) = \frac{(1 - e^{-\mu_j(q)})^i}{i\mu_j(q)}$$

□

Pour une autre démonstration possible, remarquons avec Feller [12, p. 291] qu'une variable aléatoire  $Z$  de loi géométrique de paramètre  $r$  est une loi de Poisson composée, c'est-à-dire la somme de  $N$  variables aléatoires  $Z_k$  i.i.d. où  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $-\log r$ . En effet la fonction génératrice de  $Z$  s'écrit  $g_Z(s) = \frac{r}{1-s(1-r)} = \exp(\log r - \log(1-s(1-r)))$  qui est bien de la forme  $\exp(-\lambda + \lambda f(s))$  avec  $\lambda = -\log r$  et  $f(s) = \frac{\log(1-s(1-r))}{\log r}$ , où  $f(s)$  est la fonction génératrice de  $Z_k$ .

$f(s) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{[s(1-r)]^i}{i \log r} = \sum_{i=1}^{\infty} s^i \frac{(1-r)^i}{-i \log r}$  entraîne que  $Z_k$  suit la loi log-séries de paramètre  $1-r$ . Sa moyenne est  $\frac{1-r}{-r \log r}$  et  $\mathbb{P}(Z_k = i) = \frac{(1-r)^i}{-i \log r}$  pour tout  $i \geq 1$ .

Nous avons l'égalité en loi

$$H_{q,j} \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{K_{q,j}} E_{q,j,k}$$

où, par la proposition 18,  $H_{q,j}$  suit une loi géométrique de paramètre  $r = \exp(-\mu_j(q))$  et  $K_{q,j}$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu_j(q) = -\log r$ . Nous pouvons donc en déduire que  $E_{q,j,k}$  suit une loi log-séries de paramètre  $1 - \exp(-\mu_j(q))$ . Sa moyenne est  $\frac{1 - \exp(-\mu_j(q))}{\mu_j(q) \exp(-\mu_j(q))}$  et nous retrouvons bien  $\mathbb{P}(E_{q,j,k} = i) = \frac{(1 - e^{-\mu_j(q)})^i}{i \mu_j(q)}$ .

Notons enfin que le nombre moyen de segments de pente  $x_j$  est  $\mu_j(q)$ , le nombre moyen d'excursions par segment de pente  $x_j$  est  $\frac{1 - \exp(-\mu_j(q))}{\mu_j(q) \exp(-\mu_j(q))}$ , et le nombre moyen d'excursions de pente  $x_j$  est  $\frac{1 - \exp(-\mu_j(q))}{\exp(-\mu_j(q))}$ .

Nous pouvons maintenant décrire la loi jointe des trois compositions emboîtées  $\Xi_{[0,n(q)]}^H \preceq \Xi_{[0,n(q)]}^K \preceq \Xi_{[0,n(q)]}^F$ . Le théorème suivant est un résumé de la plupart des informations obtenues du Théorème 17 au Lemme 21.

**Théorème 22.** *Soit  $n(q)$  une variable aléatoire géométrique de paramètre  $1 - q$ . Soit  $X_1, X_2, \dots$  indépendantes et de même loi. Soit  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $j \geq 1$ . Soit  $x_1, x_2, \dots$  une énumération de l'ensemble des nombres réels  $x$  pour lesquels  $\mathbb{P}(S_k = kx)$  est positive pour un  $k > 0$ , et pour  $j \geq 1$  soit*

$$\mu_j(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} q^k \mathbb{P}(S_k = kx_j)$$

*Soit  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  telle que conditionnellement à  $n(q) = n$ ,  $S_\rho^{[0,n(q)]}$  est construite de la même manière que  $S_\rho^{[0,n]}$  dans le Théorème 1. Soit  $\bar{C}_\rho^{[0,n(q)]}$  le majorant concave de  $S_\rho^{[0,n(q)]}$ . Alors indépendamment pour tout  $j \geq 1$  :*

- *Il existe une face de  $\bar{C}_\rho^{[0,n(q)]}$  de pente  $x_j$  avec la probabilité  $1 - e^{-\mu_j(q)}$ .*
- *Conditionné par l'existence d'une face de pente  $x_j$  le nombre de blocs de  $\Xi_{[0,n]}^K$  associés à la pente  $x_j$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu_j(q)$ , conditionnée à des valeurs au moins égales à un.*
- *Conditionnellement à l'existence de  $k_{q,j}$  blocs de  $\Xi_{[0,n]}^K$  associés à la pente  $x_j$ , le nombre de blocs d'excursions dans chacun des  $k_{q,j}$  blocs de segments a la loi log-séries de paramètre  $1 - e^{-\mu_j(q)}$ , indépendamment pour tout segment.*
- *La longueur de chaque excursion de pente  $x_j$  est indépendante de toutes les autres excursions et a la loi de fonction génératrice*

$$G_{L_{q,j}^H}(z) = (1 - e^{-\mu_j(qz)}) / (1 - e^{-\mu_j(q)})$$

Tout bloc face de pente  $x$  tel que  $x \neq x_j$  pour tout  $j \geq 1$  est formé exactement d'un bloc segment, qui est formé lui-même d'exactly un bloc excursion. Les longueurs et les accroissements des faces de pente  $x$  telle que  $x \neq x_j$  pour tout  $j \geq 1$  constituent un processus ponctuel de Poisson sur  $\{1, 2, \dots\} \times \mathbb{R}$  d'intensité  $i^{-1}q^i\mathbb{P}(S_i \in ds)$  pour  $i \geq 1, s \in \mathbb{R}$ , mais restreint à la région

$$\{(i, s) \in \{1, 2, \dots\} \times \mathbb{R} : s \neq ix_j \text{ pour tout } j \geq 1\}$$

Les trois compositions emboîtées avec la loi jointe de  $\Xi_{[0,n(q)]}^H, \Xi_{[0,n(q)]}^K$  et  $\Xi_{[0,n(q)]}^F$  sont créées en ordonnant de manière aléatoire uniforme les excursions dans chaque segment, les segments dans chaque face, en rangeant les faces par ordre de pente décroissante, et en observant alors les compositions induites des blocs excursion, des blocs segment et des blocs face.

Le Théorème 22 implique que les compositions  $\Xi_{[0,n(q)]}^H \preceq \Xi_{[0,n(q)]}^K \preceq \Xi_{[0,n(q)]}^F$  peuvent être générées par des processus de renouvellement emboîtés sur  $\mathbb{N}$  qui se terminent à un temps géométrique. Il y aurait trois types d'époques de renouvellement. Le premier serait quand une nouvelle face commence ce qui implique un nouveau bloc segment et un nouveau bloc excursion. Le deuxième serait quand seulement un nouveau bloc segment commence avec un nouveau bloc excursion, et le troisième quand seulement un nouveau bloc excursion commence. Contrairement aux précédentes études sur les suites de renouvellement emboîtées [5, 9], les lois des longueurs jusqu'au renouvellement suivant peuvent changer avec le temps et après qu'un renouvellement a eu lieu le nombre de futurs renouvellements peut dépendre du nombre de renouvellements déjà réalisés.

Le Théorème 22 nous permet de calculer aisément les probabilités de plusieurs événements de fluctuations pour  $S^{[0,n(q)]}$ . Par exemples

- Pour tout  $j \geq 1$ , la probabilité que  $\bar{C}^{[0,n(q)]}$  consiste en une unique face de pente  $x_j$  est  $(1 - q)(e^{\mu_j(q)} - 1)$ .
- La probabilité que  $S^{[0,n(q)]}$  atteint son maximum en un point unique, c'est-à-dire la probabilité que  $\bar{C}^{[0,n(q)]}$  n'a aucune face de pente nulle, est  $\exp[-\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}q^k\mathbb{P}(S_k = 0)]$ .
- Pour tout  $j \geq 1$ , la longueur moyenne de la face de  $\bar{C}^{[0,n(q)]}$  de pente  $x_j$  est  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k\mathbb{P}(S_k = kx_j)$ .

Par la proposition 18, la probabilité d'avoir une face de pente  $x_j$  est  $1 - e^{-\mu_j(q)}$  et la probabilité de ne pas avoir de face de pente différente de  $x_j$  est  $e^{-\mu_0(q)} \prod_{i \neq j} e^{-\mu_i(q)} = (1 - q)e^{\mu_j(q)}$ . Nous en déduisons, par indépendance, que la probabilité d'avoir une unique face de pente  $x_j$  est  $(1 - q)(e^{\mu_j(q)} - 1)$ .

Appliquons ce résultat au cas de la marche de Bernoulli symétrique, soit  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2 : \mu_j(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}q^k(1/2)^k = -\log(1 - q/2)$  et la probabilité que le majorant concave consiste en une face unique

de pente 1 est alors  $q(1 - q)/(2 - q)$ , probabilité qui tend vers 0 si  $q$  tend vers 1.

Nous retrouvons le résultat attendu, à savoir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{une face unique de pente 1 et de longueur } k | n(q) = k) \mathbb{P}(n(q) = k)$$

soit :  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/2^k)(1 - q)q^k = q(1 - q)/(2 - q)$ .

Notons que la probabilité d'avoir une face de pente 1 est  $1 - e^{-\mu_j(q)}$ , ce qui donne évidemment pour la marche de Bernoulli symétrique  $1 - (1 - q/2) = q/2$ , probabilité qui tend vers 1/2 si  $q$  tend vers 1. La présence du facteur  $q$  est claire ; rappelons que la marche a une longueur aléatoire et que  $q$  est la probabilité que la longueur de la marche ne soit pas nulle. Donc, conditionnée par  $n(q) \neq 0$ , la probabilité d'avoir une face de pente 1 est bien 1/2

Rappelons que  $k^{-1}q^k$  est le nombre moyen de segments de longueur  $k$ ,  $k^{-1}q^k \mathbb{P}(S_k = kx_j)$  est le nombre moyen de segments de longueur  $k$  et de pente  $x_j$ , donc  $q^k \mathbb{P}(S_k = kx_j)$  est la longueur moyenne de la partie de la face de pente  $x_j$  formée par des segments de longueur  $k$ . Il n'y a plus qu'à sommer pour  $k \geq 1$ , et on obtient la longueur moyenne de la face de pente  $x_j$ .

Pour la marche de Bernoulli symétrique, la longueur moyenne de la face de pente 1 est  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \mathbb{P}(S_k = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k/2^k = q/(2 - q)$ , longueur qui tend vers 1 si  $q$  tend vers 1.

## 7 $S^{[0,n]}$ conditionnée par son majorant concave

Pour achever la réponse au problème du réarrangement énoncé dans l'introduction, nous donnons maintenant une description de la loi de  $S^{[0,n]}$  conditionnée par  $\bar{C}^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}$ . C'est une généralisation de la transformation de Vervaat qui change un pont d'une marche aléatoire en une excursion [35, Théorème 5]. Sa transformation qui consiste à obtenir la trajectoire de l'excursion en intervertissant les parties pré-minimum et post-minimum du pont, lui permet de démontrer l'égalité en loi entre une excursion brownienne et un pont brownien dont l'origine est placée à son minimum absolu. Pour cela il introduit une marche aléatoire symétrique finie de Bernoulli commençant à l'origine et utilise la convergence en loi après changement d'échelle, d'une part, pour la marche conditionnée à se terminer en zéro, vers un pont brownien, et d'autre part, pour la marche conditionnée à rester strictement positive avant de se terminer en zéro, vers une excursion brownienne. Il démontre alors la convergence en loi après changement d'échelle, d'une part, pour la marche conditionnée à se terminer en zéro et à n'avoir qu'un minimum absolu, vers un pont brownien, et d'autre part, pour la transformée de cette même marche, vers la marche conditionnée à rester strictement positive avant de se terminer en zéro. Une difficulté étant que la marche de Bernoulli peut atteindre son minimum en plusieurs points il partage cette marche en deux, la partie comprise entre les instants extrêmes où la marche atteint son

minimum qu'il retire et la partie formée des deux morceaux restants recollés ensembles.

Notre description repose sur le choix d'une composition en segments  $\Xi_{[0,n]}^K$  conditionné par  $\bar{C}_\rho^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}$  et ensuite le choix d'une marche conditionnée par  $\Xi_{[0,n]}^K$ .

Soit  $\text{Supp}(\bar{C}^{[0,n]})$  le support de la mesure sur l'ensemble des fonctions concaves sur  $[0, n]$  qui représentent la loi de  $\bar{C}^{[0,n]}$ . Pour toute composition  $(n_1, \dots, n_k)$  de  $n$  nous disons que  $\sigma \in \Sigma_n$  est une permutation  $(n_1, \dots, n_k)$ -cyclique de  $[n]$  si son action est seulement de permuter cycliquement les  $n_1$  premiers éléments de  $[n]$ , permuter cycliquement les  $n_2$  éléments suivants de  $[n]$  et ainsi de suite. Par exemple, 234175689 est une permutation  $(4, 3, 2)$ -cyclique de  $[9]$ . Rappelons que dans la Partie 6 nous avons défini  $\mathcal{N}_n$  l'ensemble des compositions de  $n$ , et  $\mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]}) \subseteq \mathcal{N}_n$  l'ensemble des valeurs possibles de  $\Xi_{[0,n]}^K$  conditionné par  $\bar{C}_\rho^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}$ .

**Théorème 23.** *Soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{\ell=1}^j X_\ell$  pour  $1 \leq j \leq n$ , où  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires échangeables. Soit  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$  et soit  $\bar{C}^{[0,n]}$  le majorant concave de  $S^{[0,n]}$ . Supposons que  $\bar{c}^{[0,n]} \in \text{Supp}(\bar{C}^{[0,n]})$ . Soit  $q(\cdot)$  la fonction densité de probabilité sur  $\mathcal{N}_n$  qui donne la loi conditionnelle régulière de  $\Xi_{[0,n]}^K$  conditionnée par  $\bar{C}_\rho^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}$ . Soit  $(N_{n,1}, N_{n,2}, \dots, N_{n,K_n})$  une composition de  $n$  choisie en accord avec la densité  $q(\cdot)$ , indépendamment de  $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ .*

*Conditionnellement à  $\{K_n = k\}$  et  $\{N_{n,i} = n_i : 1 \leq i \leq k\}$ , soit  $Y_1, \dots, Y_n$  les variables aléatoires, indépendantes de toutes les variables aléatoires précédemment introduites, dont la loi jointe est la loi jointe conditionnelle régulière de  $X_1, \dots, X_n$ , conditionnée par  $\{S_j \in d\bar{c}^{[0,n]}(j), j = \sum_{i=1}^m n_i, 1 \leq m \leq k\}$ .*

*Conditionnellement à  $Y_1, \dots, Y_n$ , soit  $B$  l'ensemble aléatoire des permutations  $(n_1, \dots, n_k)$ -cycliques de  $[n]$  tel que*

$$Y_{\sigma(j)} \leq \bar{c}^{[0,n]}(j) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

*si et seulement si  $\sigma \in B$ . Soit  $\hat{\rho}$  un élément aléatoire de  $B$  choisi de manière uniforme et indépendante, et soit  $S_j^{\hat{\rho}} = \sum_{\ell=1}^j Y_{\hat{\rho}(\ell)}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Alors  $S_{\hat{\rho}}^{[0,n]} := \{(j, S_j^{\hat{\rho}}) : 1 \leq j \leq n\}$  suit la loi conditionnelle régulière de  $S^{[0,n]}$  conditionnellement à  $\bar{C}^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}$ .*

Le théorème est une conséquence directe des formules de Bayes et du Théorème 1. Remarquons que si  $X_1, \dots, X_n$  satisfait l'hypothèse **A**,  $\mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]})$  ne contient qu'un élément, la composition induite par les longueurs des faces de  $\bar{c}^{[0,n]}$ , et  $B$  ne contient aussi qu'un élément par le Lemme 2, et le théorème se simplifie alors de manière significative. Il reste à décrire  $q(\cdot)$ .

**Lemme 24.** *Supposons que  $\bar{c}^{[0,n]} \in \text{Supp}(\bar{C}^{[0,n]})$  et que  $X_1, \dots, X_n$  sont échangeables. La loi conditionnelle régulière de  $\Xi_{[0,n]}^K$  conditionnellement à  $\bar{C}_\rho^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}$  est donnée par*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\bar{C}^{[0,n]}(j) \in d\bar{c}^{[0,n]}(j), 1 \leq j \leq n) \mathbb{P}(\Xi_{[0,n]}^K = (n_1, \dots, n_k) | \bar{C}_\rho^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}) \\ &= \mathbf{1}_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]})} \frac{\prod_{i=1}^k n_i^{-1}}{\prod_{j=1}^{f(\bar{c}^{[0,n]})} k_j(n_1, \dots, n_k)!} \mathbb{P}(S_j \in d\bar{c}^{[0,n]}(j), j = \sum_{i=1}^l n_i, 1 \leq l \leq k) \end{aligned}$$

où  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  est comme dans le Théorème 23.

**Démonstration.** Soit  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}(\bar{c}^{[0,n]})$ . En suivant la construction du Théorème 1, par la formule d'échantillonnage d'Ewens la probabilité que  $\{L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}\}$  soit une liste d'éléments de  $(n_1, \dots, n_k)$  en ordre décroissant au sens large est  $\left(\prod_{j=1}^n (a_j!)^{-1}\right) \left(\prod_{i=1}^k n_i^{-1}\right)$  où  $a_j = \#\{i : 1 \leq i \leq k, n_i = j\}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Conditionnellement à  $\{L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}\}$  qui est une liste d'éléments de  $(n_1, \dots, n_k)$  en ordre décroissant au sens large la probabilité de l'événement  $\{\Xi^K = (n_1, \dots, n_k), \bar{C}^{[0,n]} = \bar{c}^{[0,n]}\}$  est

$$\left( \frac{\prod_{j=1}^n a_j!}{\prod_{j=1}^{f(\bar{c}^{[0,n]})} k_j(n_1, \dots, n_k)!} \right) \mathbb{P}(S_j \in d\bar{c}^{[0,n]}(j), j = \sum_{i=1}^l n_i, 1 \leq l \leq k)$$

où le dénominateur du quotient dans la parenthèse traduit le rangement des segments de la partition dans chaque face, et le numérateur traduit le fait d'avoir plusieurs segments de même longueur.  $\square$

Nous dirons que le majorant concave d'une marche aléatoire est *trivial* s'il a une unique face. Une forme particulièrement utile du Théorème 23 apparaît dans le cas où les accroissements  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendants, la probabilité que le majorant concave de  $S^{[0,n]}$  est *trivial* avec une pente nulle est positive, et nous voulons obtenir la loi conditionnelle de la marche  $S^{[0,n]}$  sachant qu'elle a un majorant concave *trivial* de pente nulle. En retranchant une droite de pente constante, nous obtenons la loi conditionnelle de la marche  $S^{[0,n]}$  sachant qu'elle a un majorant concave *trivial* de pente quelconque, pourvu que la probabilité que le majorant concave de  $S^{[0,n]}$  soit *trivial* avec cette pente est positive. Si nous souhaitons obtenir la loi conditionnelle régulière de  $S^{[0,n]}$  conditionnée par le fait d'avoir un majorant concave *trivial* avec une pente de probabilité nulle, alors la seule valeur possible pour  $\Xi_{[0,n]}^K$  est la composition triviale  $(n)$ .

**Corollaire 25.** *Soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $1 \leq j \leq n$ , où  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et soit  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$ . Supposons que*

$$p_{triv} := \mathbb{P}(\text{le majorant concave de } S^{[0,n]} \text{ est trivial de pente nulle}) > 0$$

Nous définissons une densité de probabilité  $q(\cdot)$  sur  $\mathcal{N}_n$  par

$$q((n_1, \dots, n_k)) = \frac{1}{p_{triv} k!} \prod_{i=1}^k n_i^{-1} u_{n_i}$$

où  $u_j = \mathbb{P}(S_j = 0)$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Soit  $(N_{n,1}, N_{n,2}, \dots, N_{n,K_n})$  une composition de  $n$  choisie en accord avec la densité  $q(\cdot)$ , indépendamment de  $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ .

Conditionnellement à  $\{K_n = k\}$  et  $\{N_{n,i} = n_i : 1 \leq i \leq k\}$ , indépendamment pour tout  $1 \leq i \leq k$  soit  $Y_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, Y_{n_1+\dots+n_i}$  des variables aléatoires, indépendantes de toutes les variables aléatoires introduites précédemment, dont la loi jointe est la loi conditionnelle jointe régulière de  $X_1, \dots, X_{n_i}$  conditionnée par  $\sum_{\ell=1}^{n_i} X_\ell = 0$ .

Conditionnellement à  $Y_1, \dots, Y_n$ , soit  $B$  l'ensemble aléatoire des permutations  $(n_1, \dots, n_k)$ -cycliques de  $[n]$  tel que

$$Y_{\sigma(j)} \leq 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

si et seulement si  $\sigma \in B$ . Soit  $\hat{\rho}$  un élément aléatoire de  $B$  choisi de manière uniforme et indépendante, et soit  $S_j^{\hat{\rho}} = \sum_{\ell=1}^j Y_{\hat{\rho}(\ell)}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Alors  $S_{\hat{\rho}}^{[0,n]} := \{(j, S_j^{\hat{\rho}}) : 1 \leq j \leq n\}$  a la loi conditionnelle régulière de  $S^{[0,n]}$  conditionnellement à l'événement  $S^{[0,n]}$  a un majorant concave trivial de pente nulle.

Donnons un exemple très simple afin d'éclairer la situation. Considérons la marche symétrique de Bernoulli, soit  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$  et  $n = 4$ . Sur les 16 marches équiprobables, seules les 2 marches  $(-1, -1, 1, 1)$  et  $(-1, 1, -1, 1)$  donnent un majorant concave *trivial* de pente nulle, donc  $p_{triv} = 1/8$ . Et conditionnellement à  $S^{[0,n]}$  a un majorant concave trivial de pente nulle, ces deux marches sont chacune de probabilité  $1/2$ . Les compositions possibles sont  $(4)$  et  $(2, 2)$ .

Calculons  $q((4))$  avec  $k = 1$  et  $u_4 = \mathbb{P}(S_4 = 0) = 6/16$  et  $q((2, 2))$  avec  $k = 2$  et  $u_2 = \mathbb{P}(S_2 = 0) = 1/2$ . Nous obtenons  $q((4)) = 3/4$  et  $q((2, 2)) = 1/4$ .

Déterminons la loi de  $S_{\hat{\rho}}^{[0,n]}$ . Conditionnellement à la composition  $(4)$ , il y a 6 marches vérifiant  $S_4 = 0$  et 4 d'entre elles permettent d'obtenir la marche  $(-1, -1, 1, 1)$  après une permutation  $(4)$ -cyclique, et conditionnellement à la composition  $(2, 2)$ , aucune des 4 marches vérifiant  $S_2 = S_4 = 0$  ne permet d'obtenir la marche  $(-1, -1, 1, 1)$  après une permutation  $(2, 2)$ -cyclique. Donc  $\mathbb{P}(S_{\hat{\rho}}^{[0,n]} = (-1, -1, 1, 1)) = q((4)) \times (4/6) = 1/2$ .

De même, conditionnellement à la composition  $(4)$ , parmi les 6 marches se terminant en 0, 2 d'entre elles permettent d'obtenir la marche  $(-1, 1, -1, 1)$  après une permutation  $(4)$ -cyclique, et conditionnellement à la composition  $(2, 2)$ , les 4 marches vérifiant  $S_2 = S_4 = 0$  permettent d'obtenir la



marche  $(-1, 1, -1, 1)$  après une permutation  $(2, 2)$ -cyclique. Donc  $\mathbb{P}(S_{\hat{\rho}}^{[0,n]} = (-1, 1, -1, 1)) = q((4)) \times (2/6) + q((2, 2)) = 1/2$ .

Donc  $S_{\hat{\rho}}^{[0,n]}$  suit bien la loi conditionnelle de  $S^{[0,n]}$  conditionnellement à  $S^{[0,n]}$  a un majorant concave trivial de pente nulle.

## 8 Une transformation de la trajectoire

Cette partie présente une importante transformation de la trajectoire qui est utilisée en prenant des limites de changement d'échelles par Pitman et Uribe Bravo pour décrire complètement le minorant convexe d'un processus de Lévy et des excursions de ce processus sous son majorant [26]. Un processus  $X$  est un processus de Lévy sur  $[0, \infty)$  si  $X_0 = 0$ ,  $X$  est cadlag (continu à droite avec des limites à gauche), et  $X$  a des accroissements indépendants et stationnaires. Les processus de Lévy sont les limites continues de changements d'échelles des marches aléatoires discrètes à accroissements indépendants et de même loi. Donc les résultats pour les marches aléatoires ont des analogues continus valides pour les processus de Lévy. On peut ainsi obtenir des résultats pour les processus de Cauchy qui ont été démontrés par Bertoin [6] en utilisant une technique différente. Nous en reparlerons plus loin.

Essentiellement, l'idée est qu'une face du majorant concave choisie de manière uniforme devrait avoir une longueur choisie de la même manière et que la marche correspondante devrait être la transformation, semblable à la transformation de Vervaat [35], d'une marche de même longueur.

Soit  $S_0 = 0$  et  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$  pour  $1 \leq j \leq n$ , où  $X_i, i = 1, \dots, n$  sont des variables aléatoires satisfaisant l'hypothèse **A**. Nous introduisons la transformation de trajectoire suivante pour la marche aléatoire  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j), 1 \leq j \leq n\}$ . Soit  $U$  de loi uniforme sur  $[n]$ . Soit  $g$  et  $d$  les extrémités gauche et droite respectivement de la face du majorant concave de  $S^{[0,n]}$  contenant le  $U$ -ième accroissement  $X_U$ . Définissons  $S_j^U$  pour  $1 \leq j \leq n$  par

$$S_j^U = \begin{cases} S_{U+j} - S_U & \text{pour } 0 \leq j < d - U \\ S_{g+j-(d-U)} + S_d - S_g - S_U & \text{pour } d - U \leq j < d - g \\ S_{j-(d-g)} + S_d - S_g & \text{pour } d - g \leq j < d \\ S_j & \text{pour } d \leq j \leq n. \end{cases} \quad (20)$$

et soit  $S_U^{[0,n]} = \{(j, S_j^U), 1 \leq j \leq n\}$ .

La Figure 5 donne un exemple de transformation.

**Théorème 26.**

$$(U, S^{[0,n]}) \stackrel{d}{=} (d - g, S_U^{[0,n]})$$

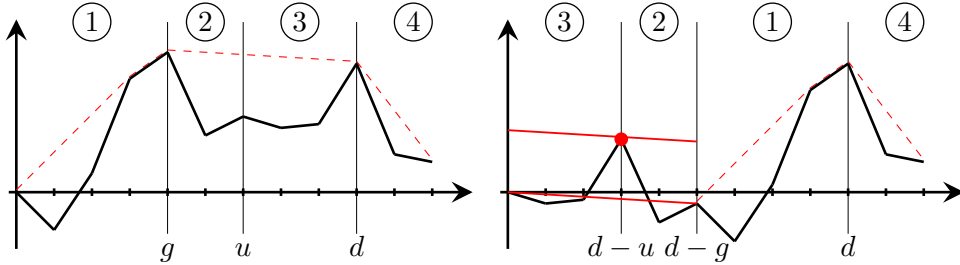


FIG. 5: Un exemple de la transformation de trajectoire "3214" du Théorème 26. La marche de droite est la version transformée de la marche de gauche. Notons comment étant donné  $d-g$  la transformation est facilement inversible - l'indice à partir duquel les  $d-g$  premiers accroissements devraient commencer après une permutation cyclique est marqué, et peut être trouvé en abaissant une droite de pente la moyenne des  $d-g$  premiers accroissements.

Vérifions déjà sur une exemple simple que  $U$  et  $d-g$  suivent la même loi. Pour  $n = 3$ , en reprenant les notations utilisées dans les exemples de calculs des probabilités des compositions de la Partie 3, nous avons

$$p(3) = 1/3, \quad p(2, 1) = p(1, 2) = 1/4, \quad p(1, 1, 1) = 1/6$$

et  $U$  étant de loi uniforme

$$P(U = 1) = p(U = 2) = p(U = 3) = \frac{1}{3}$$

et nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} p(d-g=1) &= p(d-g=1, U=1) + p(d-g=1, U=2) + p(d-g=1, U=3) \\ &= \frac{1}{3}(p(1, 1, 1) + p(1, 2)) + \frac{1}{3}(p(1, 1, 1)) + \frac{1}{3}(p(1, 1, 1) + p(2, 1)) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

En fait, le Théorème 26 nous procure une méthode alternative pour démontrer le Théorème 1 sous l'hypothèse **A**, puisque en appliquant de nouveau la transformation à la marche  $S_U^{[0, n]}$  restreinte à l'intervalle  $[d-g, n]$ , puis répétant cette opération jusqu'à qu'il n'y ait plus rien à transformer, nous construisons en fait l'inverse de la transformation donnée au Théorème 1. Rappelons que dans la construction utilisée au Théorème 1 sous l'hypothèse **A**, si nous souhaitions obtenir un majorant concave avec une face de longueur  $d-g$ , il nous fallait obtenir une permutation de  $[n]$  dont l'un des cycles avait pour longueur  $d-g$ , et ceci avec une probabilité  $\frac{1}{d-g}$ . Ensuite

parmi les marches aléatoires de longueur  $d - g$ , par permutation cyclique des accroissements, nous en avons exactement  $d - g$  qui convenaient. Ici les  $d - g$  choix possibles pour  $U$  nous permettent de retrouver ces  $d - g$  marches précédentes. Malgré cela, cette méthode ne peut pas s'étendre au cas général considéré dans la Partie 6.

**Démonstration.** Comme dans la démonstration du Théorème 1 sous l'hypothèse **A** dans la Partie 2, il est suffisant de montrer que l'égalité en loi est valide si  $X_1, \dots, X_n$  représentent un tirage sans remise de  $x_1, \dots, x_n$  satisfaisant l'hypothèse **A**.  $S^{[0,n]}$  et  $S_U^{[0,n]}$  peuvent alors être supposées des permutations de  $[n]$ , et nous pouvons considérer l'application de  $(U, S^{[0,n]}) \mapsto (d - g, S_U^{[0,n]})$  comme une application de  $[n] \times \Sigma_n$  dans lui-même. Puisque  $U$  est de loi uniforme sur  $[n]$ , et que l'ordre de  $X_1, \dots, X_n$  est le résultat d'une permutation aléatoire de  $x_1, \dots, x_n$ , il est suffisant de montrer que cette application est une bijection. Pour cela, il suffit de montrer que l'application est surjective. Ceci se voit sur la Figure 5 puisqu'il est clair à partir de la figure et de sa description que l'application est inversible. Plus formellement, pour montrer que l'application est surjective il est suffisant de montrer que pour  $k \in [n]$  il existe  $u \in [n]$  et  $\sigma \in \Sigma_n$  tels que

$$\begin{aligned} & \left( u, \{(0, 0), (1, x_{\sigma(1)}), (2, x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}), \dots, (n, \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)})\} \right) \\ & \mapsto \left( k, \{(0, 0), (1, x_1), (2, x_1 + x_2), \dots, (n, \sum_{i=1}^n x_i)\} \right) \end{aligned}$$

Soit  $f$  le nombre de faces du majorant concave de la marche de longueur  $n - k$  et d'accroissements  $x_{k+1}, \dots, x_n$ , et supposons que les longueurs et les accroissements de ces faces dans l'ordre d'apparition sont  $(\ell_1, s_1), \dots, (\ell_f, s_f)$ . Soit  $r$  l'unique  $r \in [k]$  tel que la marche d'accroissements

$$(x_{r \bmod k + 1}, x_{(r+1) \bmod k + 1}, x_{(r+2) \bmod k + 1}, \dots, x_{(r+k-2) \bmod k + 1}, x_r)$$

reste sous son majorant concave. Soit  $s^* = \sum_{i=1}^k x_i$ , et soit  $m$  l'unique  $m \in \{0, \dots, f\}$  tels que

$$\frac{s_m}{\ell_m} > \frac{s^*}{k} > \frac{s_{m+1}}{\ell_{m+1}}$$

où nous dirons que  $s_0/\ell_0 = +\infty$  et  $s_{f+1}/\ell_{f+1} = -\infty$ . La permutation  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  qui convient est donnée par

$$(k + 1, k + 2, \dots, k + \sum_{i=1}^m \ell_i,$$

$$r \bmod k + 1, (r + 1) \bmod k + 1, (r + 2) \bmod k + 1, \dots, r, k + \sum_{i=1}^m \ell_i + 1, \dots, n)$$

Notons que si  $d - g = k$  et  $d - u = r$  alors  $d = k + \sum_{i=1}^m \ell_i$ , d'où  $g = \sum_{i=1}^m \ell_i$  et  $u = k + \sum_{i=1}^m \ell_i - r$ .  $\square$

Revenons à Pitman et Uribe Bravo qui dans [26] utilise la transformation présentée ci-dessus et obtiennent un théorème analogue au Théorème 26 pour les processus de Lévy notés  $X$  qui vérifient la condition : pour tout  $t > 0$ ,  $X_t$  suit une loi continue.

Ils en déduisent que si  $(U_i)$  est une suite de variables aléatoires uniformes sur  $(0, t)$  indépendantes du processus  $X$  dont le minorant convexe est noté  $C$ , si  $(g_1, d_1), (g_2, d_2), \dots$  est la suite des intervalles des différentes excursions qui sont successivement découvertes par la suite  $(U_i)$  et si  $L$  est un processus de "stick breaking" uniforme sur  $(0, t)$  avec  $S_i = L_1 + \dots + L_i$ , alors nous avons l'égalité en loi

$$((d_i - g_i, C_{d_i} - C_{g_i}), i \geq 1) \stackrel{d}{=} ((L_i, X_{S_i} - X_{S_{i-1}}), i \geq 1)$$

Rappelons que la loi de Poisson-Dirichlet de paramètre 1 est la loi de la suite  $(L_i)$  pour  $t = 1$  rangée suivant l'ordre décroissant. L'égalité en loi ci-dessus entraîne que les longueurs ordonnées des intervalles des excursions suivent la loi de Poisson-Dirichlet de paramètre 1.

Appliquant ce résultat au processus de Cauchy, ils retrouvent le résultat de Bertoin [6]. Si  $Y_1, Y_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires de Cauchy indépendantes de  $L$  et de fonction de répartition  $F(x) = 1/2 + (1/\pi) \arctan x$ ,  $(L_i, Y_i)$  représente le processus (longueurs, pentes), alors le processus  $\mu_x$  dont nous avons parler dans la Partie 3 vérifie l'égalité en loi

$$\mu_x \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} L_i 1_{Y_i \leq x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

D'autre part si  $U_i, i \geq 1$  est une suite de variables aléatoires uniformes sur  $(0, 1)$  indépendantes de  $L$  alors le processus  $(\gamma_t/\gamma_1, t \in [0, 1])$  a la représentation

$$\sum_{i=1}^{\infty} L_i 1_{U_i \leq t}, \quad t \in [0, 1]$$

En choisissant  $U_i = F(Y_i)$ , nous obtenons le résultat

$$\mu_x \stackrel{d}{=} \gamma_F(x)/\gamma_1, \quad x \in \mathbb{R}$$

## Références

- [1] Erik Sparre Andersen. On the distribution of the random variable  $H_n$ . Tech. Sci. Note No. 1, Contract No. AF 61(052)-42, February 27, 1959. [4](#), [30](#), [37](#), [39](#)
- [2] Erik Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables. *Math. Scand.*, 1 :263–285, 1953. [3](#)
- [3] Erik Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables II. *Math. Scand.*, 2 :195–223, 1954. [3](#)
- [4] Jean Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996. [17](#), [22](#)
- [5] Jean Bertoin. Renewal theory for embedded regenerative sets. *Ann. Probab.*, 27(3) :1523–1535, 1999. [17](#), [44](#)
- [6] Jean Bertoin. The convex minorant of the Cauchy process. *Electron. Comm. Probab.*, 5 :51–55 (electronic), 2000. [17](#), [49](#), [52](#)
- [7] H. D. Brunk. A generalization of Spitzer’s combinatorial lemma. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 2 :395–405 (1964), 1964. [6](#)
- [8] Kai Lai Chung et William Feller. On Fluctuations in Coin-Tossing. *Proc. Nat. Aca. Sci. USA*, Vol 35(10) p.605-608, 1949. [3](#)
- [9] Persi Diaconis, Susan Holmes, Svante Janson, Steven P. Lalley, et Robin Pemantle. Metrics on compositions and coincidences among renewal sequences. In *Random discrete structures (Minneapolis, MN, 1993)*, volume 76 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 81–101. Springer, New York, 1996. [44](#)
- [10] Arthur Engel. *L’enseignement des Probabilités et de la Statistique. Vol. 2*. Adapté de l’allemand *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Editions CEDIC, 1979. [4](#)
- [11] Paul Erdős et Marc Kac. On the Number of Positive Sums of Independent Random Variables. *Bull. Am. Math. Soc.*, 53, p. 1011-1020, 1947. [3](#)
- [12] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*. Troisième édition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968. [2](#), [4](#), [42](#)
- [13] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Seconde édition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971. [2](#), [29](#)
- [14] Dominique Foata. Random permutations and Bernoulli sequences. [http ://www-irma.u-strasbg.fr/ foata/paper/pub95random.pdf](http://www-irma.u-strasbg.fr/foata/paper/pub95random.pdf) [5](#)
- [15] A. Gnedin et J. Pitman. Regenerative composition structures. *Ann. Probab.*, 33(2) :445–479, 2005. [18](#)

- [16] Charles M. Goldie. Records, permutations and greatest convex minorants. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 106(1) :169–177, 1989. [4](#), [5](#), [6](#), [15](#)
- [17] Solomon W. Golomb. Random permutations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 70, p. 747, 1964. [27](#)
- [18] Priscilla Greenwood et Jim Pitman. Fluctuation identities for Lévy processes and splitting at the maximum. *Adv. in Appl. Probab.*, 12(4) :893–902, 1980. [12](#)
- [19] Priscilla Greenwood et Jim Pitman. Fluctuation identities for random walk by path decomposition at the maximum. *Advances in Applied Probability*, 12(2) :291–293, 1980. [11](#), [12](#), [21](#), [28](#)
- [20] Piet Groeneboom. The concave majorant of Brownian motion. *Ann. Probab.*, 11(4) :1016–1027, 1983. [24](#)
- [21] Kiyosi Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. *Proc. 6th Berk. Symp. Math. Statist. Prob.*, 225–239, 1970. [12](#), [22](#)
- [22] M. Kac. Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory. *Duke Math. J.*, 21 :501–509, 1954. [10](#)
- [23] J.F.C. Kingman. Random Partitions in Population Genetics. *Proceedings of the Royal Society of London, Series B, Mathematical and Physical Sciences*, volume 361, numéro 1704, 1978. [14](#)
- [24] Paul-André Meyer. Processus de Poisson ponctuels, d’après K. Itô. *Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, 5 : 177–190, 1971. [22](#)
- [25] J. Pitman. *Combinatorial stochastic processes*, volume 1875 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. [4](#), [6](#)
- [26] Jim Pitman et Gerónimo Uribe Bravo. The convex minorant of a lévy process. In Progress. [9](#), [13](#), [24](#), [49](#), [52](#)
- [27] Zhihua Qiao et J. Michael Steele. Random walks whose concave majorants often have few faces. *Statist. Probab. Lett.*, 75(2) :97–102, 2005. [27](#)
- [28] Daniel Revuz et Marc Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Troisième édition. Springer, Berlin, 2005. [22](#)
- [29] L. A. Shepp et S. P. Lloyd. Ordered cycle lengths in a random permutation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 121 :340–357, 1966. [21](#), [27](#)
- [30] S. Sherman. Fluctuation and periodicity. *J. Math. Anal. Appl.*, 9 :468–476, 1964. [31](#)
- [31] Frank Spitzer. *Principles of random walk*. Seconde édition. Springer, New York, 1976. [2](#)

- [32] Frank Spitzer. A combinatorial lemma and its application to probability theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82 :323–339, 1956. [5](#), [6](#), [10](#), [13](#), [28](#)
- [33] J. Michael Steele. The Bohnenblust-Spitzer algorithm and its applications. *J. Comput. Appl. Math.*, 142(1) :235–249, 2002. Probabilistic methods in combinatorics and combinatorial optimization. [27](#)
- [34] Simon Tavaré et W.J. Ewens. The Ewens sampling Formula. Chapitre 41 de *Discrete Multivariate Distributions*, *N.L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan*, Wiley, 1997. [14](#)
- [35] Wim Vervaat. A relation between Brownian bridge and Brownian excursion. *Ann. Probab.*, 7(1) :143–149, 1979. [7](#), [45](#), [49](#)
- [36] J.G. Wendel. Spitzer’s Formula : a short proof. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 82, 905–908, 1958. [6](#)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Démonstration du Théorème 1 sous l'hypothèse A, lois des partitions et des compositions</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Exemples de probabilités des compositions</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Une description par un processus de Poisson ponctuel</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Applications de la description Poissonienne</b>	<b>24</b>
5.1	La marche aléatoire sur $[0, \infty)$ . . . . .	24
5.2	La structure du majorant concave de $S^{[0,n]}$ quand $n$ varie . .	27
5.3	Décomposition au maximum . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Le cas général</b>	<b>30</b>
<b>7</b>	<b><math>S^{[0,n]}</math> conditionnée par son majorant concave</b>	<b>45</b>
<b>8</b>	<b>Une transformation de la trajectoire</b>	<b>49</b>