Terminale | **UN CORRIGE DU DS 2** | 12/11/21

Exercice 1 2 points

$z_1 = (2+3\,\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2 - 2\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i}^2 = 2 + \mathrm{i} + 3 = 5 + \mathrm{i}$

$z_2 = (5-\mathrm{i})^2 = 25 - 10\,\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 24 - 10\,\mathrm{i}$

$z_3 = (3+2\,\mathrm{i})(3-2\,\mathrm{i}) = 9 - 4\,\mathrm{i}^2 = 13$

$z_4 = \dfrac{5+2\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(5+2\,\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{5+5\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2} = \dfrac{3+7\,\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}\,\mathrm{i}$

Exercice 2 3 points

1. $\overline{z_2} = \overline{\left(\dfrac{3+\mathrm{i}}{5-7\,\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\overline{3+\mathrm{i}}}{\overline{5-7\,\mathrm{i}}} = \dfrac{3-\mathrm{i}}{5+7\,\mathrm{i}} = z_1$

2. Un nombre complexe est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
Or, $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{\overline{z_2}} + z_1 = z_2 + z_1$. On en déduit que $z_1 + z_2$ est réel.
Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
Or, $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{\overline{z_2}} - z_1 = z_2 - z_1$. On en déduit que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

3. $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}(z_1)$ et $z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2\,\mathrm{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z_1)$.
Or $z_1 = \dfrac{(3-\mathrm{i})(5-7\,\mathrm{i})}{(5+7\,\mathrm{i})(5-7\,\mathrm{i})} = \dfrac{15-21\,\mathrm{i}-5\,\mathrm{i}+7\,\mathrm{i}^2}{25+49} = \dfrac{8-26\,\mathrm{i}}{74}$, d'où on déduit que :

$z_1 + z_2 = 2 \times \dfrac{8}{74} = \dfrac{8}{37}$ et $z_1 - z_2 = -2\,\mathrm{i} \times \dfrac{26}{74} = -\dfrac{26}{37}\,\mathrm{i}$.

Exercice 3 2 points

Pour $z \neq 1$: $\dfrac{z+1}{z-1} = 2\,\mathrm{i} \iff z+1 = 2\,\mathrm{i}(z-1) \iff z+1 = 2\,\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \iff z - 2\,\mathrm{i}z = -1 - 2\,\mathrm{i}$

$\iff z(1-2\,\mathrm{i}) = -1 - 2\,\mathrm{i} \iff z = \dfrac{-1-2\,\mathrm{i}}{1-2\,\mathrm{i}} = \dfrac{(-1-2\,\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i})}{(1-2\,\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i})} = \dfrac{3-4\,\mathrm{i}}{5} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

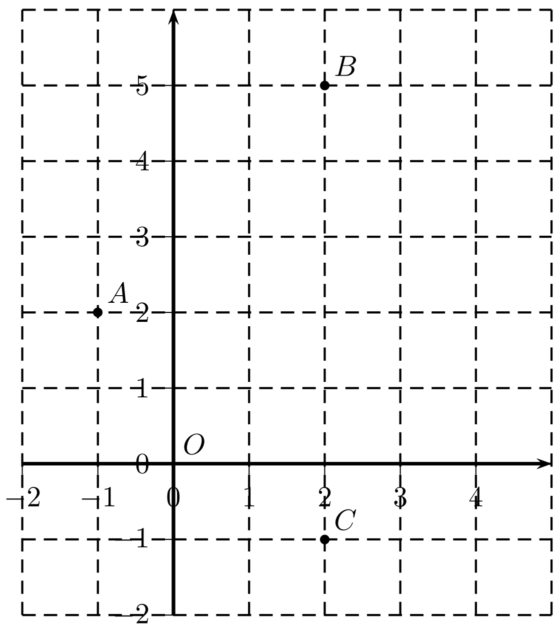
Exercice 4 2 points

1. Avec la formule du binôme : $(1+z)^4 = 1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$

2. On en déduit : $(1+\mathrm{i})^4 = 1 + 4\,\mathrm{i} + 6\,\mathrm{i}^2 + 4\,\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4$.
Soit : $(1+\mathrm{i})^4 = 1 + 4\,\mathrm{i} - 6 - 4\,\mathrm{i} + 1 = -4$.

Exercice 5 5 points

1. Figure :



2. $AB = |z_B - z_A| = |(2+5\,\mathrm{i}) - (-1+2\,\mathrm{i})| = |3+3\,\mathrm{i}| = \sqrt{18}$
$AC = |z_C - z_A| = |(2-\mathrm{i}) - (-1+2\,\mathrm{i})| = |3-3\,\mathrm{i}| = \sqrt{18}$
$BC = |z_C - z_B| = |(2-\mathrm{i}) - (2+5\,\mathrm{i})| = |-6\mathrm{i}| = 6$

3. $AB = AC$ donc le triangle est isocèle en A. De plus $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc le triangle est rectangle en A.

4. ABC est isocèle rectangle en A. Il suffit donc que $ABEC$ soit un parallélogramme.
On cherche alors l'affixe du point E tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$, soit $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CE}}$.
On obtient : $z_E - z_C = z_B - z_A$, soit $z_E = z_C + z_B - z_A = 5 + 2\mathrm{i}$.

Exercice 6 4 points

1. $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}$.

2. $|z_2| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$. Donc si α est un argument de z_2, alors $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}\quad [2\pi]$.
Une forme trigonométrique de z_2 est $4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4}))$.

3. $|z_3| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Donc si α est un argument de z_2, alors $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}\quad [2\pi]$.
Une forme trigonométrique de z_2 est $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{3}))$.

4. $|z_4| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Donc si α est un argument de z_3, alors
$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ d'où $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}\quad [2\pi]$.
Une forme trigonométrique de z_3 est $2\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{6}))$.

Exercice 7 2 points

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + \mathrm{i}\dfrac{2t}{1+t^2}$.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}$$

soit $|z| = \sqrt{\dfrac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = 1$