Terminale | **UN CORRIGE DU DS 1** | 28/09/21

Exercice 1 2 points

On effectue une division euclidienne avec pour dividende un entier naturel a non nul et pour diviseur 15. Le reste est égal au carré du quotient. Calculer le dividende a.

Corrigé

Division euclidienne : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. On traduit les hypothèses $b = 15$ et $r = q^2$: soit $a = 15q + q^2$ avec $0 \leq q^2 < 15$. La condition $a > 0$ entraîne $q > 0$. Donc les valeurs possibles pour q sont : 1, 2, ou 3. On obtient les valeurs possibles pour le dividende a : 16, 34, 54.

Exercice 2 4 points

1. Prouver que $4321^{77777} \equiv 1$ [5].

Corrigé

$4321 \equiv 1$ [5] (car $4321 = 4320 + 1$), donc $4321^{77777} \equiv 1^{77777}$ [5], soit $4321^{77777} \equiv 1$ [5].

2. Démontrer que : $4321^{77777} + 1234^{97979}$ est divisible par 5.

Corrigé

$4321^{77777} \equiv 1$ [5] d'après la 1ère question. $1234 \equiv -1$ [5] (car $1234 = 1235 - 1$), donc $1234^{97979} \equiv (-1)^{97979}$ [5], soit $1234^{97979} \equiv -1$ [5] car 97979 est impair.

On en déduit : $4321^{77777} + 1234^{97979} \equiv 1 - 1$ [5], soit $4321^{77777} + 1234^{97979} \equiv 0$ [5], ce qui signifie que $4321^{77777} + 1234^{97979}$ est divisible par 5.

Exercice 3 2 points

Déterminer le reste de la division euclidienne de 36^{400} par 17.

Corrigé

$36 = 17 \times 2 + 2$, donc $36 \equiv 2$ [17] et $36^{400} \equiv 2^{400}$ [17].

Or $2^4 = 17 - 1$, donc $2^4 \equiv -1$ [17], et $2^{400} = (2^4)^{100}$, d'où $2^{400} \equiv (-1)^{100}$ [17]. Puisque $(-1)^{100} = 1$, on en déduit que $36^{400} \equiv 1$ [17] et on peut conclure que 1 est le reste de la division euclidienne de 36^{400} par 17.

Exercice 4 3 points

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $4x \equiv 1$ [6].

Corrigé

L'équation est équivalente à $4x - 1 \equiv 0$ [6]. Le nombre $4x - 1$ est impair, donc ne peut pas être multiple de 6. L'équation n'a pas de solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $4x \equiv 1$ [7].

Corrigé

$4 \times 0 \equiv 0$ [7], $4 \times 1 \equiv 4$ [7], $4 \times 2 \equiv 1$ [7], $4 \times 3 \equiv 5$ [7], $4 \times 4 \equiv 2$ [7], $4 \times 5 \equiv 6$ [7], $4 \times 6 \equiv 3$ [7].

Donc l'équation $4x \equiv 1$ [7] est équivalente à l'équation $x \equiv 2$ [7]. Les solutions sont tous les nombres x tels que $x = 2 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 3 points

On suppose que n est un entier relatif quelconque.

Prouver que la fraction $\dfrac{n+1}{n^2+n+1}$ est irréductible.

Corrigé

Si $n + 1$ est divisible par d avec $d > 1$, alors $n + 1 \equiv 0$ [d], soit $n \equiv -1$ [d].

Alors $n^2 \equiv 1\ [d]$, donc $n^2+n+1 \equiv 1\ [d]$ et n^2+n+1 n'est pas divisible par d. Ainsi la fraction est irréductible.

Exercice 6 4 points

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $9^n - 4^n$ est divisible par 5.

Corrigé

Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$ car $9^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ est divisible par 5.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un entier k quelconque, soit $9^k - 4^k$ est divisible par 5. Alors, il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $9^k - 4^k = 5u$. D'où $9(9^k - 4^k) = 9 \times 5u$, soit $9^{k+1} - 9 \times 4^k = 9 \times 5u$. On en déduit que $9^{k+1} - 4 \times 4^k - 5 \times 4^k = 9 \times 5u$, puis $9^{k+1} - 4 \times 4^k = 5 \times 4^k + 9 \times 5u$, et enfin $9^{k+1} - 4^{k+1} = 5(4^k + 9u)$. On pose $v = 4^k + 9u$, et il existe donc $v \in \mathbb{Z}$ tel que $9^{k+1} - 4^{k+1} = 5v$. Ceci signifie que $9^{k+1} - 4^{k+1}$ est divisible par 5 donc que la propriété est vraie pour l'entier $k+1$.

Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer en utilisant des congruences que pour tout entier naturel n, $11^n + 4^{2n} - 2$ est divisible par 5.

Corrigé

$11 \equiv 1\ [5]$, donc $11^n \equiv 1^n\ [5]$, soit $11^n \equiv 1\ [5]$.

$4 \equiv -1\ [5]$, donc $4^2 \equiv 1\ [5]$, et $(4^2)^n \equiv 1^n\ [5]$, soit $4^{2n} \equiv 1\ [5]$.

Donc $11^n + 4^{2n} - 2 \equiv 1 + 1 - 2 \equiv 0\ [5]$.