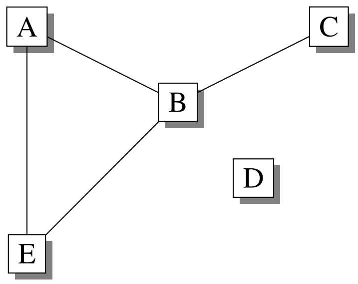
Mathématiques expertes
Graphes

1 Vocabulaire

Le vocabulaire utilisé est intuitif. Un *graphe* est constitué de *sommets* et d'*arêtes*. Une arête, ou un arc, relie deux sommets qui sont dits *adjacents*. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes liées à ce sommet. Un sommet peut avoir un degré 0 (aucune arête). L'*ordre* d'un graphe est le nombre de sommets. Si nous supposons un sens de parcours des arêtes, nous disons que le graphe est *orienté*. Si deux sommets quelconques sont adjacents, (un sommet quelconque est donc relié directement à tous les autres), le graphe est *complet*.

On note souvent un graphe $G(S, A)$, avec S l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes, ou $G(V, E)$, avec en anglais V pour *vertice* (sommet) et E pour *edge* (arête).

Un exemple de représentation :



Ce graphe est d'ordre 5. Il présente 4 arêtes. Le degré du sommet A est 2, celui du sommet B est 3, celui du sommet C est 1, celui de D est 0 et celui de E est 2.

Les trois arêtes $[AB]$, $[BE]$ et $[EA]$ forment une chaîne fermée notée $ABEA$ qui s'appelle un *cycle*. De manière générale, une *chaîne* ou un *chemin* est une suite ordonnée de sommets consécutivement adjacents. Une chaîne est fermée si l'origine et l'extrémité sont confondues. Un chemin est aussi défini par la suite d'arêtes qui relient deux sommets.

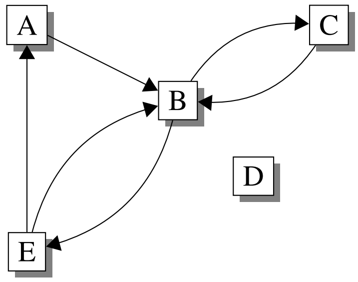
2 Matrice d'adjacence

À un graphe on associe une matrice, dite *matrice d'adjacence*.

Pour l'exemple précédent, on obtient la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

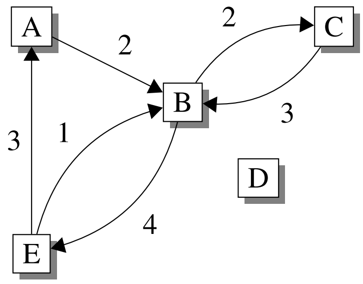
Les sommets A, B, C, D, E sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5. Le nombre à l'intersection de la ligne i et de la colonne j vaut 1 si une arête relie les sommets numéros i et j et 0 sinon. Cette matrice est symétrique et elle définit complètement le graphe.

Dans le cas d'un d'un graphe orienté, on utilise aussi une matrice d'adjacence.



La matrice d'adjacence n'est pas symétrique en général : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les arêtes peuvent être affectées d'étiquettes. Si ce sont des nombres positifs, on parle alors de poids et de graphe pondéré. On peut utiliser la matrice en remplaçant les 1 par les poids.



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$