Mathématiques expertes
Les nombres complexes
Applications en géométrie

Serge Bays

Lycée les Eucalyptus

21 février 2022

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Soit A et B sont deux points distincts de O, d'affixes respectives z_A et z_B.

Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OA})$ est un argument de z_A modulo 2π : $(\vec{u}; \overrightarrow{OA}) = \arg(z_A) \quad [2\pi]$.

Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ est un argument de z_B/z_A modulo 2π : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B/z_A) \quad [2\pi]$
soit $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) - \arg(z_A) \quad [2\pi]$.

De manière générale, si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\vec{U}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{OB}$, alors $(\vec{U};\vec{V}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.

Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

$$|z_B - z_A| = AB \text{ et } \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$$

En particulier :

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA}$$

Conséquence

Le triangle ABC est isocèle en A si, et seulement si :

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$$

Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$$

Conséquences

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si
$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0 \quad [\pi]$$

Les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

Définition

Une racine n-ième de l'unité est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

Pour n donné, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité se note $\mathbb{U}_n$.

On parle aussi de racines carrées ou racines cubiques. Par exemple les racines cubiques de l'unité sont 1, j, j^2.

Propriété 1

Les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec k entier naturel tel que $0 \leq k < n$.

On en déduit que $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments distincts.

Propriété 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct de centre O.
Pour tout entier naturel $n \geq 3$, les n racines n-ièmes de l'unité constituent les affixes des sommets du polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un sommet est le point d'affixe 1.