Mathématiques expertes
Les nombres complexes
Equations

Serge Bays

Lycée les Eucalyptus

8 mars 2021

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels, a toujours des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels, a toujours des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels, a toujours des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle :

$$z_1 = z_2 = \ldots\ldots$$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{avec } z_2 = \ldots$$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ avec } z_2 = \overline{z_1}$$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ avec } z_2 = \overline{z_1}$$

Conséquence

Dans $\mathbb{C}$, le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise toujours sous la forme : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Démonstration

On écrit le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2 + bz + c = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Démonstration

On écrit le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Démonstration

On écrit le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est résoudre l'équation

. . . .

Démonstration

On écrit le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est résoudre l'équation

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

Démonstration
On écrit le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est résoudre l'équation

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

- si $\Delta > 0$ ou si $\Delta = 0$, on sait que l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ et deux seulement (distinctes ou égales). Elle a donc deux solutions complexes et deux seulement puisque $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a

. . . .

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$.

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$= \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$= \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Ainsi l'équation a deux solutions :

$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ avec $z_2 = \overline{z_1}$.

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$= \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Ainsi l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec } z_2 = \overline{z_1}.$$

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$= \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Ainsi l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec } z_2 = \overline{z_1}.$$

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant :
$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 = (48i)^2$.

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 = (48i)^2$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 = (48i)^2$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{12 - 48i}{8} = \frac{3}{2} - 6i \text{ et } z_2 = \frac{12 + 48i}{8} = \frac{3}{2} + 6i$$

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 = (48i)^2$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{12 - 48i}{8} = \frac{3}{2} - 6i \text{ et } z_2 = \frac{12 + 48i}{8} = \frac{3}{2} + 6i$$

$$S = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 = (48i)^2$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{12 - 48i}{8} = \frac{3}{2} - 6i \text{ et } z_2 = \frac{12 + 48i}{8} = \frac{3}{2} + 6i$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} - 6i ; \frac{3}{2} + 6i \right\}$$

Exemple :
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304 = (48i)^2$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{12 - 48i}{8} = \frac{3}{2} - 6i \text{ et } z_2 = \frac{12 + 48i}{8} = \frac{3}{2} + 6i$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} - 6i ; \frac{3}{2} + 6i \right\}$$

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = c$, a exactement deux solutions si $c \neq 0$.

- si $c > 0$, l'équation a deux solutions réelles opposées :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = c$, a exactement deux solutions si $c \neq 0$.

- si $c > 0$, l'équation a deux solutions réelles opposées :

$$z_1 = \sqrt{c} \text{ et } z_2 = -\sqrt{c}$$

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = c$, a exactement deux solutions si $c \neq 0$.

- si $c > 0$, l'équation a deux solutions réelles opposées :

$$z_1 = \sqrt{c} \text{ et } z_2 = -\sqrt{c}$$

- si $c < 0$, l'équation a deux solutions imaginaires :

$$z_1 = i\sqrt{-c} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{-c}$$

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = c$, a exactement deux solutions si $c \neq 0$.

- si $c > 0$, l'équation a deux solutions réelles opposées :

$$z_1 = \sqrt{c} \text{ et } z_2 = -\sqrt{c}$$

- si $c < 0$, l'équation a deux solutions imaginaires :

$$z_1 = i\sqrt{-c} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{-c}$$

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = c$, a exactement deux solutions si $c \neq 0$.

- si $c > 0$, l'équation a deux solutions réelles opposées :

$$z_1 = \sqrt{c} \text{ et } z_2 = -\sqrt{c}$$

- si $c < 0$, l'équation a deux solutions imaginaires :

$$z_1 = i\sqrt{-c} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{-c}$$

Définition

Un polynôme de degré n est une fonction P définie par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
où les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des réels avec a_n non nul.

Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont appelés les *coefficients* du polynôme P.

Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

Définition : un nombre a réel ou complexe est *racine* d'un polynôme P si, et seulement si, $P(a) = 0$.

Définition : si P est un polynôme et a un réel ou un complexe, le polynôme P est factorisable par $x - a$ si $P(x) = (x - a)Q(x)$ où Q est un polynôme.

Théorème : si a est une racine d'un polynôme P alors P est factorisable par $x - a$.

Théorème : un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Exemple : $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$

Théorème

Pour tout z et pour tout a complexes, pour tout n entier naturel non nul :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \ldots + z^2a^{n-3} + za^{n-2} + a^{n-1})$$