Mathématiques expertes
Les nombres complexes
Trigonométrie

Serge Bays

Lycée les Eucalyptus

13 janvier 2022

Pour tout réel a et b :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Pour tout réel a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta = \arg(z)\ \ (2\pi)$.

On note f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
On se propose de démontrer que pour tous réels θ et θ', $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

$$f(\theta) \times f(\theta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta']$$

$$
\begin{aligned}
f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\ &= [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'] + i[\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\ &= [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'] + i[\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta] \end{aligned}$$

Soit : $f(\theta) \times f(\theta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\ &= [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'] + i[\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta] \end{aligned}$$

Soit : $f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\ &= [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'] + i[\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta] \end{aligned}$$

Soit : $f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$

De plus, $f(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$
\begin{aligned}
f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\
&= [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'] + i[\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta]
\end{aligned}
$$

Soit : $f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$

De plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' + i\sin\theta'] \\ &= [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'] + i[\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta] \end{aligned}$$

Soit : $f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$

De plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser . . . .

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors

....

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors
$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$,

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$, ce qui justifie cette notation exponentielle.

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

. . . .

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Exemples

$e^{i\pi} = \ldots$

Exemples

$e^{i\pi} = -1$

Exemples

$e^{i\pi} = -1$; $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \ldots$

Exemples

$e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Exemples

$e^{i\pi} = -1$; $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite ....
......

Exemples

$e^{i\pi} = -1$; $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

Exemples

$e^{i\pi} = -1 \;;\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

Pour tout réels θ et θ' :

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \ldots\ldots \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = \ldots\ldots$$

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \dots\dots\dots\dots \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \dots$$

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'}$ s'écrit :

....

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{-i\theta'}$ s'écrit :
$\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') = [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' - i\sin\theta']$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'}$ s'écrit :
$\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta') = [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' - i\sin\theta']$
$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'}$ s'écrit :

$$\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') = [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' - i\sin\theta']$$
$$= \cos\theta\cos\theta' - i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' - i\sin\theta'] \\ &= \cos\theta\cos\theta' - i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :
$\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{-i\theta'}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' - i\sin\theta'] \\
&= \cos\theta\cos\theta' - i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \\
&= [\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'] + i[\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta']
\end{aligned}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') &= [\cos\theta + i\sin\theta] \times [\cos\theta' - i\sin\theta'] \\ &= \cos\theta\cos\theta' - i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \\ &= [\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'] + i[\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta']\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(\theta - \theta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi on retrouve bien :
$\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$

Ainsi on retrouve bien :
$\cos(\theta - \theta') = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta'$ et
$\sin(\theta - \theta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$ et

$\sin(\theta - \theta') = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$ et

$\sin(\theta - \theta') = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$

Autre exemple :
$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

....

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$
$$= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(2\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Formules d'Euler

Pour tout réel θ :

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Autrement dit : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$