Mathématiques expertes
Les nombres complexes
Point de vue géométrique

Serge Bays

Lycée les Eucalyptus

9 octobre 2021

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\mathrm{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés . . . .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image et ....

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\mathrm{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image et vecteur image

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image et vecteur image de z.

- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$, appelé . . . .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\,\text{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image et vecteur image de z.

- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + b\,\text{i}$, appelé affixe de M

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image et vecteur image de z.

- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$, appelé affixe de M et . . . .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\,\text{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image et vecteur image de z.

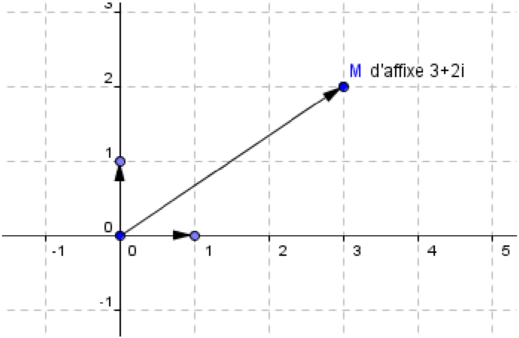
- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + b\,\text{i}$, appelé affixe de M et affixe de $\vec{w}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point image et vecteur image de z.

- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$, appelé affixe de M et affixe de $\vec{w}$.

Le plan est alors appelé plan complexe.


M d'affixe 3+2i
-1
0
1
2
3
4
5
-1
0
1
2

- Le point image d'un réel appartient à l'.......................

- Le point image d’un réel appartient à l’axe des abscisses.

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe . . . .

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'. . . . .

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées.

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des . . . .

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires.

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires.
- Si M est le point d'affixe $z = x + \mathrm{i}\, y$ et N est le point d'affixe $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$, alors ....
....

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires.
- Si M est le point d'affixe $z = x + \mathrm{i}\, y$ et N est le point d'affixe $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$, alors M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires.
- Si M est le point d'affixe $z = x + \mathrm{i}\, y$ et N est le point d'affixe $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$, alors M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe . . . .

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe . . . .

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe ....

On considère les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- $\lambda \overrightarrow{w}$ a pour affixe ......

On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- $\lambda\,\vec{w}$ a pour affixe λz.

On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- $\lambda \vec{w}$ a pour affixe λz.

Preuve :
Il s'agit simplement d'une autre écriture des propriétés déjà connues pour les coordonnées.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y$ un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre positif $\sqrt{x^2 + y^2}$.
C'est donc . . . .

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y$ un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre positif $\sqrt{x^2 + y^2}$.
C'est donc la distance OM : $|z| = OM$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y$ un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre positif $\sqrt{x^2 + y^2}$.
C'est donc la distance OM : $|z| = OM$.
Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de ....
....

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

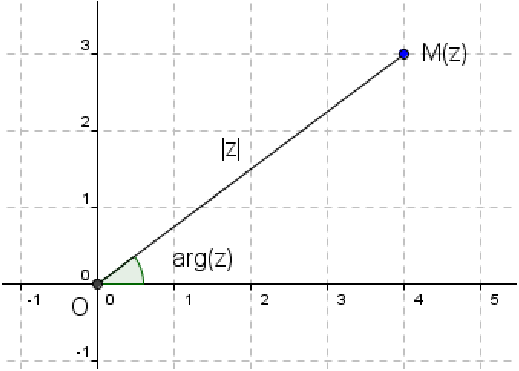
Définition

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y$ un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre positif $\sqrt{x^2 + y^2}$.
C'est donc la distance OM : $|z| = OM$.
Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$:
$\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi)$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y$ un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre positif $\sqrt{x^2 + y^2}$.
C'est donc la distance OM : $|z| = OM$.
Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$:
$\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi)$.


M(z)
|z|
arg(z)
O
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5

Exemples

$$|\,\mathrm{i}\,| = \ldots \qquad \arg(\,\mathrm{i}\,) = \ldots \quad (2\pi)$$

Exemples

$$|\,\mathrm{i}\,| = 1 \qquad \arg(\,\mathrm{i}\,) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

Exemples

$$|\,\mathrm{i}\,| = 1 \qquad \arg(\,\mathrm{i}\,) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$|-3| = \ldots \qquad \arg(-3) = \ldots \quad (2\pi)$$

Exemples

$$|\,\mathrm{i}\,| = 1 \qquad \arg(\,\mathrm{i}\,) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$|-3| = 3 \qquad \arg(-3) = \pi \quad (2\pi)$$

Exemples

$$|\,\mathrm{i}\,| = 1 \qquad \arg(\,\mathrm{i}\,) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$|-3| = 3 \qquad \arg(-3) = \pi \quad (2\pi)$$

Interprétation géométrique du module

Si M et M' sont deux points du plan d'affixes respectives z et z', alors $MM' = |z' - z|$.

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = \dots\dots\dots$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\arg(\overline{z}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- Pour tout nombre complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

- z est un réel, $(z \neq 0)$, si et seulement si ....

- z est un réel, $(z \neq 0)$, si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad (\pi)$.

- z est un réel, $(z \neq 0)$, si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad (\pi)$.
- z est un imaginaire pur, $(z \neq 0)$, si et seulement si
  ....

- z est un réel, $(z \neq 0)$, si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad (\pi)$.
- z est un imaginaire pur, $(z \neq 0)$, si et seulement si
  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

- z est un réel, $(z \neq 0)$, si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad (\pi)$.
- z est un imaginaire pur, $(z \neq 0)$, si et seulement si
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi).$$

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

$|z \times z'| = \dots\dots\dots$

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

- Puissance

$$|z^n| = \dots$$

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

- Puissance

$|z^n| = |z|^n$

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

- Puissance

$$|z^n| = |z|^n$$

- Inverse

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \ldots\ldots$$

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

- Puissance

$$|z^n| = |z|^n$$

- Inverse

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

- Puissance

$$|z^n| = |z|^n$$

- Inverse

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

- Quotient

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \dots$$

- Quotient

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

- Quotient

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

- Somme

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq \ldots\ldots\ldots$

- Quotient

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

- Somme

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

- Quotient

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

- Somme

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$.

Propriétés

Si z et z' sont éléments de $\mathbb{U}$, alors zz' et $\dfrac{1}{z}$ sont éléments de $\mathbb{U}$.

En effet :

si $|z| = 1$ et $|z'| = 1$ alors $|zz'| = |z||z'| = 1$

et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = 1$

Remarque

Les nombres complexes éléments de $\mathbb{U}$ sont exactement les nombres qui s'écrivent sous la forme $z = \cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha$ où α est un réel quelconque.

On vérifie que si $z = \cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha$ alors $|z| = 1$:

$$|z| = |\cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = 1$$

Définition

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite ....

Définition

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \qquad \text{avec} \quad r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

- Si la forme algébrique de z est $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$$r = \dots\dots\dots$$

- Si la forme algébrique de z est $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Si la forme algébrique de z est $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et θ tel que $\cos\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Si la forme algébrique de z est $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- Si la forme algébrique de z est $z = a + b\mathrm{i}$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Si la forme algébrique de z est $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si la forme algébrique de z est $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec

$$a = \ldots\ldots$$

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec

$$a = r\cos\theta$$

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec

$$a = r\cos\theta$$

et

$$b = \ldots\ldots$$

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec

$$a = r\cos\theta$$

et

$$b = r\sin\theta$$

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + b\,\mathrm{i}$ avec

$$a = r\cos\theta$$

et

$$b = r\sin\theta$$