Mathématiques expertes
Les nombres complexes
Point de vue algébrique

Serge Bays

Lycée les Eucalyptus

18 septembre 2021

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés . . . .
. . . .

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble ....

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que . . . .

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul ....

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme . . . .

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la ....

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.

- On dit que le réel *a* est la . . . .

- On dit que le réel a est la partie réelle

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $\dots\dots\dots$

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la . . . .

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $\dots\dots\dots$

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé ....

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé imaginaire pur

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\ldots\ldots\ldots$

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\mathcal{I}m(z) = 0$

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\mathcal{I}m(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que $\ldots\ldots\ldots$

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\mathcal{I}m(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que $\mathcal{R}e(z) = 0$

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\mathcal{I}m(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que $\mathcal{R}e(z) = 0$.

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont ....

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + bi = a' + b'i \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

- En particulier :

$$a + bi = 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

- En particulier :

$$a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$$

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

- En particulier :

$$a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$$

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.
- produit : $zz' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.
- produit : $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.

- produit : $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a+bi)(a-bi) = \dots\dots\dots$$

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe ......

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = \ldots\ldots$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = \dots$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = 4$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = 4$; si $z = -2i$ alors $\overline{z} = \dots$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = 4$; si $z = -2i$ alors $\overline{z} = 2i$

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = 4$; si $z = -2i$ alors $\overline{z} = 2i$.

Conséquence :
si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = \ldots\ldots$$

Conséquence :
si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

Conséquence :
si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

Il en résulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \ldots$"

Conséquence :
si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

Il en résulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \overline{z}$ "

Conséquence :
si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

Il en résulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \overline{z}$ ".
- "Le nombre complexe z est imaginaire pur" équivaut à "$z + \overline{z} = \dots$"

Conséquence :
si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

Il en résulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \overline{z}$ ".
- "Le nombre complexe z est imaginaire pur" équivaut à "$z + \overline{z} = 0$ "

Conséquence :
si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

Il en résulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \overline{z}$ ".
- "Le nombre complexe z est imaginaire pur" équivaut à "$z + \overline{z} = 0$ ".

Propriétés

$$\overline{z+z'} = \ldots\ldots$$

Propriétés

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

Propriétés

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

$\overline{zz'} = \ldots\ldots$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \ldots\ldots$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

$\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \ldots$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$. et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \ldots$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$. et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$. et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Remarque

$\overline{\overline{z}} = \ldots$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$. et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Remarque

$\overline{\overline{z}} = z$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$. et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Remarque

$\overline{\overline{z}} = z$ $z\overline{z} = \ldots\ldots$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$. et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Remarque

$\overline{\overline{z}} = z$ $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$. et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Remarque

$\overline{\overline{z}} = z$ $z\overline{z} = a^2 + b^2$

On doit cette formule au mathématicien Isaac Newton.
Si a et b sont deux nombres complexes et n un entier naturel, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemples

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Démonstration de la formule du binôme

On démontre cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.