Mathématiques expertes
Exercices d'arithmétique

1 Récurrence

1. Démontrer par récurrence que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. Démontrer par récurrence que $0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$ pour tout n entier naturel.
3. Démontrer par récurrence que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. Démontrer que $2^n \geq n$ pour tout n entier naturel.
5. Soit $P(n)$ et $Q(n)$ les propriétés $4^n - 1$ est divisible par 3 et $4^n + 1$ est divisible par 3.
   (a) Montrer que $P(n)$ et $Q(n)$ sont héréditaires.
   (b) Montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n et que $Q(n)$ est fausse pour tout n.
   Aide : $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$ et $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$
6. Prouver que $n^2 + n + 2$ est pair pour tout n.
7. Prouver les propriétés suivantes :
   (a) $5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11 ;
   (b) $7^n - 1$ est divisible par 6 ;
   (c) $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

2 Division euclidienne

1. Effectuer la division euclidienne de 61 par 8 dans $\mathbb{N}$.
   En utilisant le résultat précédent, déterminer les couples (q, r) d'éléments de $\mathbb{Z}$ vérifiant $-61 = 8q + r$ et $|r| < 8$.
2. Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{Z}$ de 213 par 8 et de (-213) par 8.

3 Congruence

1. Quel est le reste de la division par 5 de 17^{53} ?
2. Dans $\mathbb{N}$, quels peuvent être le diviseur et le reste d'une division euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient 12 ?
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $x^{11} \equiv x \pmod{11}$, $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $x^5 \equiv 1 \pmod{11}$.
4. Montrer que $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $x \equiv 1 \pmod{3}$ et $x \equiv 2 \pmod{7}$

4 Divisibilité

1. Combien y a-t-il de multiples de 11 compris entre -1000 et 1000 ?
2. Déterminer la liste des diviseurs de 60.
3. Montrer que $2^{32} \equiv 1\ [5]$
4. Sans effectuer la division, montrer que 23157 est divisible par 9.
   On écrira $23157 = 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 10^2 + 5 \times 10 + 7$

5. Montrer que $9^n - 2^n$ est divisible par 7 en utilisant un raisonnement par récurrence puis à l'aide des congruences.
6. Montrer que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 .
7. Soit n un entier naturel, montrer que $n^3 - n$ est divisible par 6.
8. Démontrer que quel que soit l'entier n, $n \geq 1$, l'entier A, $A = n^2(n^2 - 1)$ est divisible par 12.
9. Trouver les entiers n tels que la fraction $\dfrac{n+17}{n-1}$ soit un entier (on pourra écrire $\dfrac{n+17}{n-1} = a + \dfrac{b}{n-1}$), avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
10. Trouver les caractères de divisibilité par 3, 4, 9, 11.
11. Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$. En déduire un critère de divisibilité par 7.
12. Déterminer les chiffres inconnus x et y de sorte que le nombre dont l'écriture dans le système décimal est $x43y$ soit divisible par 2 et par 9.
13. (a) Soit n un entier non divisible par 5 ; montrer que son carré augmenté ou diminué de l est divisible par 5.
    (b) Soit n un entier non divisible par 7 ; montrer que son cube augmenté ou diminué de 1 est divisible par 7
14. (a) Quels sont les restes possibles de la division de a^4 par 5 ?
    (b) Démontrer alors que $a^5 - a$ est divisible par 10.
15. Les fractions suivantes sont-elles irréductibles : $\dfrac{n^2}{n+1}$ où n est un entier différent de -1 ? $\dfrac{n}{2n+1}$ où n est un entier quelconque ?