

## SUJET ZÉRO

### Epreuve d'informatique et modélisation de systèmes physiques

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

---

**L'usage de calculatrices est interdit**

**Aucun document n'est autorisé**

#### **Composition du sujet :**

- 1 cahier de 10 pages de texte numérotées de 1 à 10 (incluant cette page)

#### **Gestion du temps :**

Il est vivement conseillé de répartir votre temps de composition comme suit :

- 1h30 pour prendre connaissance du sujet (Partie I) et lire et traiter la partie modélisation (Parties II et III),
- 2h30 pour lire et traiter la partie informatique (partie IV et V).

Il est demandé au candidat de formuler toutes les hypothèses qu'il jugera nécessaires pour répondre aux questions posées.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs

# Étude d'un capteur de modification de fissure : fissuromètre

## I Présentation

Dans le domaine de la construction, l'entretien ou la rénovation de bâtiments, les ingénieurs sont amenés à suivre l'évolution des fissures qui peuvent apparaître sur les parois, les fondations... Le suivi de ses fissures permet de protéger l'intégrité du bâtiment et de ses occupants en ne réalisant des travaux de consolidation (coûteux) que lorsque cela est nécessaire.

Pour détecter une légère modification de la largeur de la fissure, une technique consiste à utiliser un capteur fixé de part et d'autre de la fissure (voir FIGURE 1). Ce capteur est composé d'un ressort, d'un câble en série et d'un détecteur. Le tout est situé à l'intérieur d'un cylindre protecteur.



FIGURE 1 – Implantation d'un fissuromètre

Les applications numériques seront données avec 1 chiffre significatif, sauf contre ordre.

Données numériques :

Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$

$\sqrt{150} = 12$

## II Etude de la vibration du câble

### II.1 Caractéristiques

Le câble en acier de masse volumique  $8000 \text{ kg m}^{-3}$  a une longueur de 500 mm et un rayon de 2 mm.

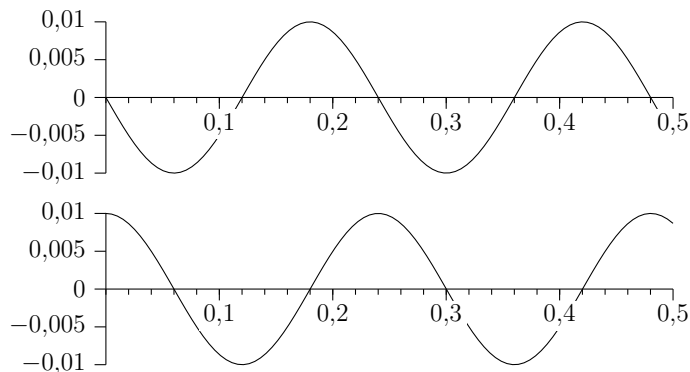
**Q1.** Déterminer sa masse linéique.

On assimile le câble à une corde inextensible sans raideur, de masse linéique constante  $\mu$ , tendu par un ressort de raideur  $k = 10^3 \text{ N m}^{-1}$  fixé à son extrémité qui exerce une tension  $T_0$ . Au repos, elle se confond avec l'axe  $(O, \vec{x})$ . On note  $L$  la longueur de la corde placée entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . On étudie les vibrations de la corde dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , c'est-à-dire les petits mouvements transversaux selon  $(O, \vec{y})$ , de part et d'autre de cette position de repos.

## II.2 Etude stroboscopique d'une onde

L'extrémité  $x = L$  est libre, l'autre est reliée à un vibreur entretenu par une tension sinusoïdale. Le vibreur est de période comprise entre 2 ms et 100 ms.

La vibration est étudiée au moyen d'un stroboscope dont on augmente progressivement sa période  $T_s$ . On observe les profils suivants d'une portion de câble pour deux flashes successifs (les graduations sont en mètre) pour une période  $T_s = 5 \times 10^{-3}$  s.



**Q2.a)** Qualifier la nature de cette onde.

b) Donner en justifiant le sens de propagation de cette onde.

La vitesse de propagation est donnée par  $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ .

c) Déterminer la valeur de la tension  $T_0$  avec deux chiffres significatifs.

d) Donner la forme de l'équation de propagation que vérifie l'élongation  $y(x,t)$ , puis la forme de  $y(x,t)$ .

## II.3 Etude des modes

La corde est maintenant fixée en  $y = 0$  à chacune des ses extrémités. Le ressort subit une élongation de 1,5 cm supposée fixe au cours des vibrations de la corde que l'on écarte de sa position d'équilibre et que l'on abandonne à elle-même à  $t = 0$ .

**Q3.a)** Donner les valeurs des conditions limites de  $y(x,t)$  en  $x = 0$  et  $x = L$  quel que soit  $t$ .

On cherche une solution  $y(x,t) = f(x) \times \sin(\omega t)$ .

b) Déterminer l'équation vérifiée par  $f(x)$  puis la forme générale de la solution.

c) En déduire l'expression des modes propres.

d) Justifier que la forme générale de l'onde peut s'écrire sous la forme  $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$

avec  $y_n(x,t) = (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

On indique que  $a_n$  et  $b_n$  sont décroissants en fonction de  $n$ .

e) Donner les fréquences présentes dans les vibrations.

f) Donner la fréquence de la vibration la plus intense. Déterminer numériquement sa valeur avec deux chiffres significatifs.

g) En réalité le signal comporte pour chaque harmonique une décroissance exponentielle. Expliquer son origine.

### Principe de la détection.

Par suite d'un mouvement de terrain la largeur de la fissure varie de  $\Delta L_0$ , la longueur de la corde étant constante.

h) Déterminer la variation de la fréquence propre fondamentale due à cette variation.

i) On veut détecter une variation de 0,1 mm. Donner la valeur de la précision du détecteur de fréquence.

## III Modélisation du détecteur

Situé sous la corde, un détecteur permet d'enregistrer le signal.

Ce détecteur est composé d'une bobine de fil de cuivre de hauteur  $h = 2$  cm, de section circulaire  $S = 7,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$  comportant  $N = 1000$  spires d'axe porté par  $\vec{y}$ .

### III.1 Préliminaire

#### III.1.1 Théorème d'Ampère

Q4.a) Donner l'équation locale de Maxwell Ampère en présence de charges et de courants.

b) En déduire le théorème d'Ampère en régime variable ou théorème d'Ampère généralisé.

c) Donner l'énoncé ce théorème en régime quasi-stationnaire. (On ne demande pas de justifications).

#### III.1.2 Champ magnétique créé par un « solénoïde infini »

On considère que la bobine s'assimile à un solénoïde infini.

Q5.a) Discuter la légitimité de cette approximation.

Quelle que soit la réponse apportée les calculs suivants seront effectués sous cette approximation.

b) Précisez les composantes et les dépendances du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par ce solénoïde en tout point de l'espace. Donner la valeur du champ à l'extérieur en justifiant votre réponse.

c) Déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

d) Evaluer l'ordre de grandeur de l'inductance de cette bobine.

e) Donner explicitement un protocole expérimental permettant de mesurer cette inductance.

f) Dire si la valeur réelle est plus grande ou plus faible que la valeur obtenue dans le cadre du solénoïde infini.

### III.2 Principe de fonctionnement du détecteur

L'élément de câble situé en  $C$  au dessus de la bobine se comporte comme un petit aimant assimilable à un moment magnétique  $\vec{m}$  parallèle à l'axe de la bobine (voir FIGURE 2).

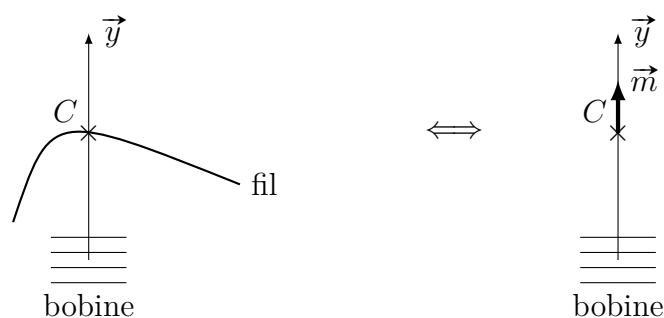


FIGURE 2 – Modélisation de fil au dessus de la bobine.

### III.2.1 Moment magnétique

**Q6.a)** Donner le moment magnétique  $\vec{m}$  d'une spire circulaire de rayon  $a$  et d'axe  $(C, \vec{y})$  parcourue par un courant électrique d'intensité  $i$ .

b) Donner l'ordre de grandeur du moment magnétique d'un aimant.

### III.2.2 Champ créé

On considère dans un premier temps la spire circulaire associée au moment déterminé en Q6.a).

**Q7.a)** En considérant un point de son axe, déterminer la direction du champ magnétique qu'elle crée.

Dans le cas limite où la spire s'assimile à un moment magnétique, la forme des lignes de champ est tracée sur la FIGURE 3 dans un plan passant par l'axe  $(C, \vec{y})$  et  $(C, \vec{x})$ .

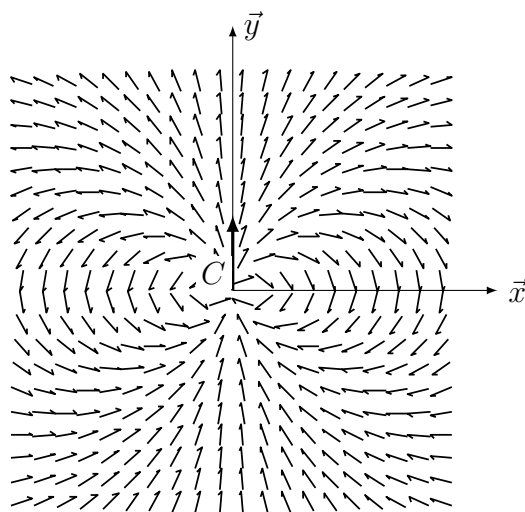


FIGURE 3 – Forme des lignes de champ.

b) Justifier que les lignes de champ sont comprises dans ce plan. Justifier les symétries observées d'axe  $(C, \vec{y})$  et d'axe  $(C, \vec{x})$ .

On donne l'expression du champ créé par la spire sur son axe à une distance  $Y$  de son centre :  $B(Y) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + Y^2)^{3/2}}$ .

c) En déduire l'expression du champ créé par le moment sur l'axe en fonction du moment  $m$  et de  $Y$ .

### III.3 Détection

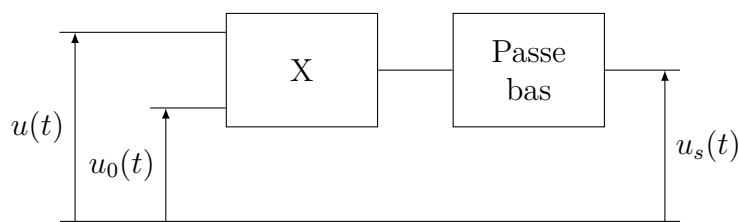
#### III.3.1 Principe de la détection

**Q8.a)** Du fait du mouvement du fil, une tension apparaît aux bornes de la bobine. Expliquez son origine.

**b)** On se place en circuit ouvert. Déterminer l'expression de cette tension dans le cas où la vibration du fil est sinusoïdale d'amplitude  $y_0$  et que la bobine est située à une distance  $d$  sous l'axe  $(O, \vec{x})$  (on a  $d = 2\text{ cm}$  et  $y_0 = 2\text{ mm}$ ). Déterminer l'amplitude de cette tension en prenant pour  $m$  une valeur que l'on justifiera.

#### III.3.2 Détermination analogique de la fréquence

Le signal capté  $u(t) = U \sin(\omega t)$  est envoyé dans le montage de la FIGURE 4.



Avec  $u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

(X) est un multiplieur de tension de sortie  $k \times u(t) \times u_0(t)$

FIGURE 4 – Montage de traitement analogique de la fréquence.

**Q9.a)** Donner la valeur de la pulsation  $\omega_0$  et une contrainte sur la pulsation de coupure afin d'obtenir un signal constant en sortie.

**b)** En pratique le déphasage entre les deux signaux est aléatoire. Expliquer quel est le problème pratique ainsi posé.

#### III.3.3 Numérisation du signal

La tension  $u(t) = U \sin(\omega t)$  est échantillonnée avec une période d'échantillonnage  $T_e$ .

**Q10.a)** Définir en quoi consiste l'échantillonnage et proposer un montage pratique.

**b)** Donner la condition à respecter pour  $T_e$  afin de pouvoir retrouver le signal analogique.

On converti le signal en signal numérique codé sur 10 bits.

**c)** Sachant que l'amplitude du signal appartient à  $\pm 5\text{ V}$ , déterminer la résolution du signal numérisé (c'est-à-dire la variation de tension minimale détectable).

## IV Traitement numérique des informations

La première partie a permis de montrer comment mesurer un déplacement de la fissure en reliant ce déplacement à la fréquence de la vibration de la corde dans le capteur.

Le capteur fourni une tension  $u(t)$  qui va subir un traitement informatique par une carte de commande. L'objectif de cette partie est de mettre en place les différents algorithmes permettant de déterminer la fréquence de la vibration de la corde, la détection d'une modification brusque

de cette corde et comment est filtré le signal avant de réaliser les traitements numériques précédents.

Les algorithmes demandés au candidat peuvent être réalisés **dans le langage Python ou dans le langage Scilab ; toutes les questions seront traitées dans le même langage.**

Veillez à apporter les commentaires suffisant à la compréhension de votre programme et à utiliser des noms de variables explicites.

## IV.1 Numérisation du signal

Le signal  $u(t)$  est numérisé par un convertisseur analogique-numérique 10 bits.

L'acquisition du signal consiste à obtenir  $N = 100$  valeurs stockées en format flottant simple précision (32 bits). Pour les besoins du traitement numérique, on considère qu'il faut le double de la taille mémoire nécessaire à stocker le signal numérisé.

La gamme de micro-contrôleurs utilisés pour réaliser l'acquisition et les différents traitements numériques possèdent une mémoire interne à choisir parmi les valeurs suivantes : 512, 1024, 2048, 4096, 8192 octets.

**Q11.** Déterminer la quantité de mémoire nécessaire au traitement numérique du signal et en déduire la taille de mémoire interne nécessaire du micro-contrôleur.

La fréquence d'échantillonnage est notée  $f_e$ , la période d'échantillonnage est notée  $T_e$ . Le signal numérisé est stocké dans une liste de taille  $N$ , notée `Ue`, contenant l'ensemble des valeurs  $u(nT_e)$  accessible par la commande `Ue[n]` avec  $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$  en Python et par la commande `Ue(n)` avec  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  en Scilab.

Le signal numérisé est filtré pour supprimer les bruits de mesure et permet d'obtenir le signal filtré numérique  $Uf$  sous forme d'une nouvelle liste `Uf`. L'étude du filtre fait l'objet des questions dans la suite du sujet.

## IV.2 Détermination de la fréquence de vibration de la corde

La méthode classique permettant de déterminer le contenu fréquentiel d'un signal est de déterminer sa transformée de Fourier afin d'observer les extrema en fonction de la fréquence.

Pour un signal numérique, on utilise la transformée de Fourier discrète, définie par :

$$TUF(k) = \sum_{n=0}^N Uf(n)e^{-2\pi jk \frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^N Uf(n) \cos\left(-2\pi k \frac{n}{N}\right) + j \sum_{n=0}^N Uf(n) \sin\left(-2\pi k \frac{n}{N}\right)$$

avec  $0 \leq k < N$

**Q12.** Ecrire une fonction `trans_fourier_freq(U,k)` retournant la partie réelle et la partie imaginaire de la transformée de Fourier pour la fréquence `k`.

**Q13.** Ecrire une fonction `module(a,b)` retournant le module du complexe  $a + jb$ .

**Q14.** Ecrire une fonction `trans_fourier(U)` retournant le module de la transformée de Fourier discrète sous la forme d'une liste de taille  $N$  contenant les modules des termes  $TUF(k)$  en utilisant notamment des appels aux fonctions précédentes `trans_fourier_freq(U,k)` et `module(a,b)`.

**Q15.** Déterminer la complexité du calcul de la transformée de Fourier par la fonction `trans_fourier(U)` en fonction de  $N$  et commenter en quelques phrases de l'efficacité de l'algorithme utilisé.

La liste des fréquences  $f_k$  associées à chaque terme  $TUF(k)$  de la transformation de Fourier est stockée dans la liste `freq`. La définition de la liste des fréquences est :

– si  $N$  est pair, la liste des fréquences vaut :

$$[0, 1, \dots, N/2 - 1, -N/2, -N/2 + 1, \dots, -1] \times \frac{1}{N \times Te}$$

– si  $N$  est impair, la liste des fréquences vaut :

$$[0, 1, \dots, (N - 1)/2, -(N - 1)/2, -(N - 1)/2 + 1, \dots, -1] \times \frac{1}{N \times Te}$$

**Q16.** Déterminer la liste des fréquences pour :

–  $N = 10$  et  $Te = 1/10$ ,

–  $N = 11$  et  $Te = 1/11$ .

**Q17.** Ecrire une fonction `freq_fourier(U,Te)` qui renvoie la liste des fréquences `freq`.

L'étude mathématique de la transformée de Fourier permet de montrer que seules les fréquences inférieures à  $\frac{f_e}{2}$  peuvent être représentées.

La définition de la liste des fréquences échantillonnées montre que certaines fréquences sont négatives. Seule l'étude de la réponse pour les fréquences positives nous intéresse.

La transformée de Fourier du signal est stockée dans la liste `TFU`.

**Q18.** Ecrire une fonction `freq_corde(U)` retournant la fréquence où le module de la transformée de Fourier est maximal; cette fréquence correspond à la fréquence de vibration de la corde. On supposera que le maximum est unique. On utilisera notamment les fonctions `freq_fourier(U,Te)` et `trans_fourier(U)` dans la fonction à écrire.

### IV.3 Détermination d'une modification de la fissure

En pratique, tant que la variable booléenne `mode_analyse` est vrai, toutes les 10 s, une nouvelle mesure  $U_f$  est analysée permettant d'obtenir une nouvelle valeur de la fréquence de la corde.

La nouvelle valeur de la fréquence de la corde est stockée dans une liste notée `liste_freq_corde`.

L'algorithme calcule la moyenne `M` de la liste ainsi que l'écart type `EC`.

Si la nouvelle valeur de la fréquence de la corde n'est pas comprise dans l'intervalle  $[M - 5EC, M + 5EC]$  alors on passe la variable `mode_analyse` à faux et on passe la variable `alarme` à vrai. On supposera que les variables `mode_analyse` et `alarme` sont globales.

**Q19.** Expliciter la différence entre des variables globales et des variables locales.

**Q20.** Ecrire une fonction `moyenne_optimisee(var1, var2, ...)`, dont les arguments sont à définir, qui détermine la nouvelle moyenne à partir de la nouvelle mesure et de la moyenne déterminée pour l'ensemble des mesures précédentes. Expliciter en terme de nombre d'opérations pourquoi votre fonction est optimale par rapport à un calcul classique de la moyenne.

On rappelle la définition de l'écart type pour une liste de valeur de taille  $n_1$  :

$$EC = \sqrt{\frac{1}{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-1} (L(i) - M_L)^2} = \sqrt{\frac{1}{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-1} L(i)^2 - M_L^2}$$

avec  $M_L$  la moyenne des valeurs de la liste  $L$ .

**Q21.** Ecrire une fonction `ecart_type_optimise(var1, var2, ...)`, dont les arguments sont à définir, qui sera optimisée : c'est-à-dire qu'elle utilisera la valeur de l'écart type déterminé pour l'ensemble des mesures précédentes (ou des variables intermédiaires permettant ce calcul que vous pourriez sauvegarder) pour déterminer le nouvel écart type. Expliciter en terme de



nombre d'opérations pourquoi votre fonction est optimale par rapport à un calcul classique de l'écart type.

**Q22.** Ecrire une fonction `analyse()` qui permet de satisfaire à la description du début du paragraphe IV.3. Vous pourrez faire appel aux fonctions :

- `ecart_type_optimise(var1, var2, ...)`,
- `moyenne_optimisee(var1, var2, ...)`,
- `filtre_signal(Ue, Te, wc)` qui renvoie le signal filtré  $u_f(t)$ ,
- la fonction `acquisition()` qui renvoie le signal brut  $u_e(t)$ .

## IV.4 Filtrage du signal

Un filtre classique utilisé dans le domaine du traitement du signal est le filtre de Butterworth. Ce filtre passe-bas permet d'avoir un gain constant sur la bande passante et une coupure très forte pour des ordres relativement faibles.

La fonction de transfert d'un filtre de Butterworth est :

$$H_{BT}(p) = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^n \left( \frac{p}{\omega_c} - e^{-j \frac{(2k+n-1)\pi}{2n}} \right)}$$

où  $n$  est l'ordre du filtre,  $\omega_c$  la pulsation de coupure,  $G_0$  le gain du filtre généralement égal à 1.

Pour tester le filtre, on utilise un signal bruité fictif fabriqué numériquement. On choisit de bruiteur un signal théorique donné en ajoutant un nombre aléatoire compris entre  $-a$  et  $a$ . On utilise pour cela la fonction `random` qui renvoie un nombre entre 0 et 1.

On souhaite bruiteur numériquement la fonction  $f(t) = t$ .

Un candidat propose la solution suivante pour obtenir la liste des valeurs  $f(t_i)$  pour une discrétisation temporelle donnée.

En langage Python :

```
>>> import random as rd
>>>
>>> def y(t, a):
...     yt = a*rd.random()+t
...     return yt
...
>>>
>>> t=arange(0,1,0.1)
>>> print(t)
[0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7
 0.8 0.9]
>>> Ybruit=y(t,0.08)
>>> print(Ybruit)
[0.03018467 0.13018467 0.23018467
 0.33018467 0.43018467 0.53018467
 0.63018467 0.73018467 0.83018467
 0.93018467]
```

En langage Scilab :

```
—>function yt = y(t, a)
—>yt = a*rand()+t
—>endfunction
—>t=[0:0.1:1]
t =
0.    0.1    0.2    0.3    0.4    0.5
      0.6    0.7    0.8    0.9    1.
—> Ybruit=y(t,0.08)
Ybruit =
0.03018467 0.13018467 0.23018467
0.33018467 0.43018467 0.53018467
0.63018467 0.73018467 0.83018467
0.93018467
```

**Q23.** Observer le résultat de la proposition du candidat et justifier que cette solution ne répond pas aux attentes.

**Q24.** Proposer une fonction `y(t, a)` qui réponde à la définition souhaitée.

**Q25.** Exprimer  $U_{fp\_n}$ , la dérivée première de  $u_f(t)$  à l'instant  $nTe$ , en fonction des valeurs de la liste `Uf` et de `Te` en appliquant la méthode d'Euler explicite.

**Q26.** Exprimer  $U_{fpp\_n}$ , la dérivée seconde de  $u_f(t)$  à l'instant  $nTe$ , en fonction des valeurs de la liste  $U_f$  et de  $Te$  en appliquant la méthode d'Euler explicite.

**Q27.** En déduire la relation de récurrence du filtre en déterminant l'expression de  $U_f[n]$  en fonction de  $U_f[n-1]$ ,  $U_f[n-2]$ ,  $U_e[n]$ ,  $Te$  et  $wc$ .

**Q28.** Ecrire une fonction `filtre_signal(Ue, Te, wc)` renvoyant la liste  $U_f$  représentant le signal filtré. On supposera les conditions initiales nulles.

## V Stockage et analyse des résultats

Les données sont stockées dans une base de données permettant de garder l'évolution de différentes grandeurs télémétriques. Un opérateur peut venir interroger cette base de données et tracer des graphiques.

La base de données est composée d'une seule table nommée `evol_fissure` composée des champs suivant :

- `id` : identifiant interne à la base de données,
- `time` : valeur temporelle correspondant à la date, l'heure, minute et seconde de la mesure
- `freq` : fréquence mesurée du câble
- `depl` : largeur de la fissure

L'opérateur interroge la base de données pour obtenir un graphique entre deux dates qui seront stockées dans les variables `time1` et `time2`. Il souhaite tracer l'évolution de la largeur de la fissure entre ces deux dates.

**Q29.** Donner la requête SQL à envoyer à la base de données permettant de récupérer la valeur des champs `time` et `depl` entre les deux instants `time1` et `time2`.

La requête est envoyée et traitée à l'aide d'une fonction `traitement_requete(requete)` qui retourne une matrice `resultat_requete` dont la première colonne est le temps en seconde (avec pour origine la date `time1`) et la seconde la valeur du déplacement correspondant en mètre.

La figure affichée est donnée sur la FIGURE 5.

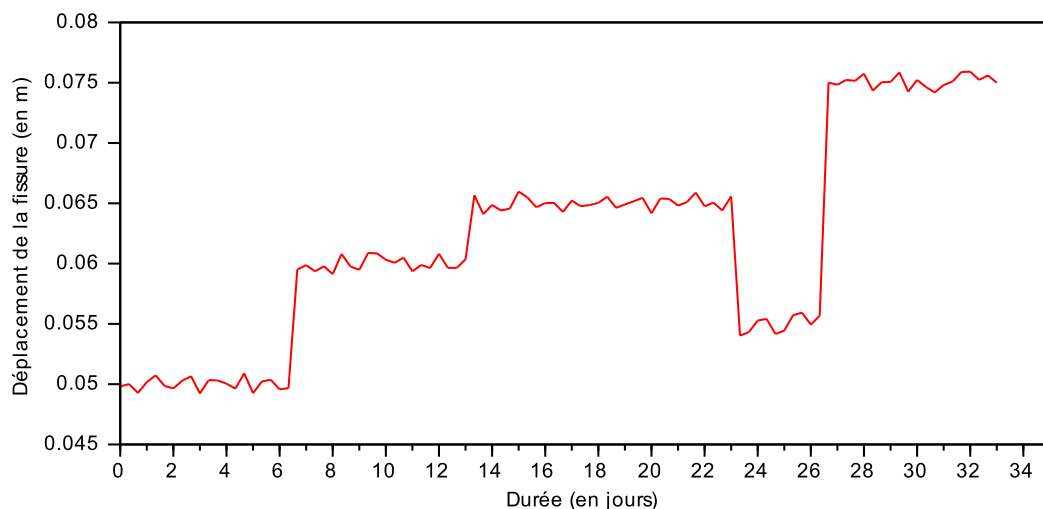


FIGURE 5 – Évolution de la largeur de la fissure en fonction du temps.

**Q30.** Donner les commandes qui ont été nécessaires pour réaliser l'affichage de la FIGURE 5, sachant que seule une valeur sur 10 est tracée.