Informatique en CPGE (2018-2019)
TD 13 : équations différentielles

Des méthodes

Méthode de Heun
Schéma :
Pour $k = 0$ à $k = n - 1$

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$u = y_k + hf(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}hf(x_k, y_k) + \frac{1}{2}hf(x_{k+1}, u)$$

Méthode du point milieu
Schéma :
Pour $k = 1$ à $k = n - 1$

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(x_k, y_k)$$

Il faut ajouter une étape pour le calcul de y_1.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2
Schéma :
Pour $k = 0$ à $k = n - 1$

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$K_1 = hf(x_k, y_k)$$
$$K_2 = hf(x_k + h/2, y_k + K_1/2)$$
$$y_{k+1} = y_k + K_2$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4
Schéma :
Pour $k = 0$ à $k = n - 1$

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$K_1 = hf(x_k, y_k)$$
$$K_2 = hf(x_k + h/2, y_k + K_1/2)$$
$$K_3 = hf(x_k + h/2, y_k + K_2/2)$$
$$K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3)$$
$$y_{k+1} = y_k + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$$

Méthode d'Euler implicite
Nous utilisons ici un schéma rétrograde :
Pour $k = 0$ à $k = n - 1$

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$$

La programmation est différente si f n'est pas linéaire en y.

Soit F définie par $F(y_{k+1}) = y_{k+1} - hf(x_{k+1}, y_{k+1}) - y_k$. Le calcul de y_{k+1} revient à résoudre l'équation $F(u) = 0$ par exemple avec la méthode de Newton qui nécessite le calcul de $F'(u)$ ou la méthode par dichotomie.

Exercice 1

1. Ecrire une fonction qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f entre a et b avec $a < b$. La fonction prend en paramètres la fonction, les bornes de l'intervalle et le pas utilisé. La méthode utilisée est la méthode des rectangles.

Donner la valeur approchée de $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ obtenue avec un pas $h = 0.01$.

2. Ecrire une fonction **euler** qui calcule une solution approchée de la fonction y solution de l'équation différentielle $y' = 1/x$ sur l'intervalle $[1; 2]$, avec la condition initiale $y(1) = 0$. Le pas utilisé est $h = 0.01$

   Donner la valeur approchée de $y(2)$ et comparer avec la valeur exacte et la valeur approchée de la question précédente.
3. Tracer la courbe représentant la solution approchée et la courbe représentant la solution exacte sur un même graphique.

Exercice 2

1. Ecrire une fonction qui calcule et renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ en utilisant la méthode des trapèzes avec un pas $h = 0.01$.

   Donner une valeur approchée I de $\displaystyle\int_0^8 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
2. Ecrire une fonction **euler** qui calcule une solution approchée de la fonction y solution de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur l'intervalle $[0; 8]$, avec la condition initiale $y(0) = 0$.

   Utiliser pour approximation de la dérivée : $f'(x) \simeq \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ soit le schéma : $y_{k+1} = y_k + hf(x + h/2)$.

   Donner une valeur approchée de $y(8)$. Comparer avec I et $\sqrt{\pi}/2$.
3. Tracer la courbe obtenue.

Exercice 3

Nous allons appliquer la méthode de Taylor pour résoudre numériquement l'équation différentielle $y' = 1/x$. Cette équation a été résolue à l'exercice 1 avec la méthode d'Euler.

Le principe de cette méthode consiste à remplacer sur $[x_k; x_{k+1}]$ la courbe par une parabole, et pour cela, nous utilisons la dérivée seconde.

Si l'équation s'écrit $y'(x) = f(x)$, alors nous obtenons $y''(x) = f'(x)$. Et plus généralement, si $y'(x) = f(y, x)$, alors $y''(x) = y'(x)f'_y(y, x) + f'_x(y, x)$.

C'est-à-dire : $y''(x) = f(x)f'_y(y, x) + f'_x(y, x)$.

Cette méthode est donc utilisable si le calcul de la dérivée seconde est "simple", ce qui est le cas ici.

Algorithme :

Initialisation : $x_0 = a$, $y_0 = y0$, $h = \dfrac{b-a}{n}$

Traitement :

Pour $k = 1$ à $k = n - 1$

$x_{k+1} = x_k + h$

$y_{k+1} = y_k + hf(y_k, x_k) + \dfrac{h^2}{2}(f \times df_y + df_x)(y_k, x_k)$

Ecrire une fonction **taylor** prenant les mêmes paramètres que la fonction **euler** de l'exercice 1 auxquels il faut ajouter un paramètre pour la fonction f'. Ecrire les définitions des fonctions f et f'. Comparer la solution obtenue avec celle de l'exercice 1 et avec la solution exacte, pour un pas $h = 0.1$.

Exercice 4

Il existe de nombreux modèles pour simuler et étudier les variations dans le temps d'une population donnée. Si $y(t)$ est la taille de la population au temps t, l'équation différentielle $y'(t) = ay(t)(1 - y(t)/k(t))$, correspond au modèle de **Verhulst**. Le coefficient $a > 0$ est le taux d'accroissement et $k(t) > 0$, la "capacité d'accueil" ou la limite supérieure de la taille.

1. Résoudre numériquement l'équation différentielle ci-dessus à l'aide de la méthode d'Euler. La population initiale est $p_0 = 20$, l'intervalle de temps est $[0; 200]$ et le pas de temps est $h = 0.1$. Prendre $a = 0.15$ et $k(t) = 1000$, fonction constante.

   Tester différentes valeurs pour a et k.

   Tester la fonction k définie par $k(t) = 700$ si $t \in [0; 60]$ et $k(t) = 300$ si $t > 60$.

   Tester la fonction k définie par : $k(t) = 200$ pour $t \in [40q; 40q + 10[$ et $k(t) = 100$ pour $t \in [40q + 10; 40(q + 1)[$ avec q entier naturel.
2. Remplacer la méthode d'Euler par la méthode de Heun dont le schéma est donné dans le cours.

Exercice 5 Longueur d'un arc

Notons s la fonction donnant la longueur d'un arc de courbe dont les extrémités sont les points A et B. Sous certaines conditions, si la courbe représente une fonction $y = f(x)$, alors $A(a; f(a))$, $B(b; f(b)$, et $s(b) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

Si la courbe est donnée par un système d'équations paramétriques (x(t) ; y(t)), alors $A(x(a); y(a))$, $B(x(b); y(b))$, et $s(b) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}x$.

La fonction s vérifie donc une équation différentielle du premier ordre : dans le premier cas $s'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ avec la condition initiale $s(a) = 0$ et dans le deuxième cas $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ avec la même condition initiale.

1. Ecrire un programme qui calcule une valeur approchée de la longueur de l'arc de parabole $y = x^2$, pour $x \in [0; 1]$.
2. Calculer une valeur approchée du périmètre de l'ellipse, soit l'ensemble des points de coordonnées $(2\cos(t); 3\sin(t))$, pour $t \in [0; 2\pi]$.
3. Calculer une valeur approchée de la longueur d'une cycloïde, ensemble des points de coordonnées $(4(t - \sin(t)); 4(1 - \cos(t)))$, avec $t \in [0; 2\pi]$.

Exercice 6

L'objectif est de résoudre numériquement l'équation différentielle du second ordre $y''(x)+0,5y'(x)+8\sin(y(x)) = c(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$ en utilisant la méthode d'Euler implicite (ou rétrograde).

L'équation s'écrit $Y' = (y', c(x) - 0,5y'(x) - 8\sin(y(x))) = f(y, x)$ où nous avons posé $Y = (y, y')$.

Nous prenons $c(x) = 1/(1 + x^2)$.

Rappelons le schéma d'Euler rétrograde :

Pour $k = 0$ à $k = n - 1$

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Soit F définie par $F(y_{k+1}) = y_{k+1} - hf(x_{k+1}, y_{k+1}) - y_k$. Le calcul de y_{k+1} revient à résoudre l'équation $F(u) = 0$. Cette équation est résolue ici avec la méthode de Newton.

1. Ecrire la définition de la fonction c.
2. Ecrire la définition de la fonction $f(y, x)$.

   Le paramètre y est un tableau (un couple) de type **numpy.ndarray**.

   La fonction renvoie un couple du même type.
3. Ecrire une fonction **newton(h, dh, a)** qui renvoie une valeur approchée de la solution de l'équation $h(x) = 0$ calculée par la méthode de Newton et obtenue après dix itérations.

   Le paramètre dh est la dérivée de la fonction h, le paramètre a est la valeur d'initialisation.
4. Ecrire une fonction **backEuler(a, b, y0, n, f)** qui renvoie deux tableaux x et y du type numpy.ndarray (les abscisses x_k et les valeurs approchées de $y(x_k)$). Le paramètre n est le nombre d'intervalles utilisés.

C'est la méthode de Newton qui est utilisée pour calculer y_{k+1} à chaque itération. Il est donc nécessaire de définir à chaque itération, dans le corps de la fonction **backEuler**, la fonction F et sa dérivée dF. Pour cela, nous calculons une valeur approchée de $dF(t)$ avec la formule

$$dF(t) \simeq (F(t+e) - F(t-e))/2e$$

avec par exemple $e = 10^{-5}$.

5. Les conditions initiales sont $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
   Pour le nombre d'intervalles, prendre $n = 1000$.
   Tracer la courbe représentant la solution approchée et comparer avec la courbe obtenue en utilisant la fonction **odeint** de **scipy.integrate**.

Exercice 7

Nous étudions la trajectoire d'une balle en fonction du temps $(x(t); y(t))$. Si nous ne tenons pas compte de la résistance de l'air, les équations sont : $x''(t) = 0$ et $y''(t) = -g$ où nous prenons $g = 9,81$, (la gravité). Si nous tenons compte de la résistance de l'air, les équations sont : $x''(t) = -kx'(t)$ et $y''(t) = -ku'(t) - g$ où k est une constante. Nous prenons $k = 0,2$.

La vitesse initiale est donnée par son module $v0 = 6$ et l'angle formé avec l'axe des abscisses, $a0 = \pi/4$. Donc $x'(0) = v0\cos(a0)$ et $y'(0) = v0\sin(a0)$.

Les équations différentielles sont résolues numériquement avec la méthode d'Euler en utilisant des tableaux du type numpy.ndarray.

Ecrire un programme permettant de tracer dans les deux cas les trajectoires de la balle. Les trajectoires s'arrêtent dès que $y(t) \leq 0$.

Effectuer des tests avec des valeurs initiales $v0$ et $a0$ différentes.

Exercice 8

Considérons une masse m suspendue à un fil de longueur L dont la masse est négligeable et soumis à l'accélération de la gravité $\vec{g}$. La position de la masse est repérée par l'angle α entre la direction du fil et la verticale.

La masse est lâchée à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale nulle, $\alpha'_0 = 0$, le fil faisant un angle $\alpha_0 = \pi/3$ avec la verticale. Nous supposons que l'équation différentielle satisfaite par α est : $\alpha''(t) = -a\sin(\alpha(t))$ avec $a = g/L$.

Soit $v(t) = \alpha'(t)$ alors, l'équation différentielle est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha'(t) & = & v(t) \\ v'(t) & = & -a\sin(\alpha(t)) \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales $\alpha(0) = \alpha_0$ et $v(0) = \alpha'(0)$.

L'équation à résoudre est donc de la forme $u' = f(u,t)$ avec $u = (\alpha, \alpha')$, soit $f(\alpha, \alpha', t) = (\alpha', -a\sin(\alpha))$

Résoudre numériquement l'équation différentielle sur l'intervalle $t \in [0; 10]$ en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Le pas utilisé est $h = 0,01$. Prendre $L = 0.5$ et $g = 9.81$.

Tracer la courbe représentative de la solution approchée.

Comparer avec le résultat obtenu avec celui donné par la fonction **odeint** de **scipy.integrate**.

Tracer la courbe représentant α' en fonction de α (diagramme de phase).

Exercice 9

L'équation différentielle $\alpha'' = -k_1\alpha' - k_2\sin\alpha$ est l'équation du mouvement d'un pendule amorti par une force de frottement. L'exercice précédent correspond à $k_1 = 0$.

Nous posons $y = \alpha$ et $z = \alpha'$. Les conditions sont : $\alpha_0 = \pi/3$, $\alpha'_0 = 0$, $k_1 = 0,5$, $k_2 = 10$, $t \in [0; 20]$.

1. Programmer la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas $h = 0,04$

2. Tracer les courbes représentations des solutions approchées de α en fonction de t puis de α' en fonction de α (diagramme de phase).
3. Traduire l'équation différentielle d'ordre 2 par deux équations différentielles d'ordre 1 de la forme :
$$y' = f1(y,z) \quad \text{et} \quad z' = f2(y,z)$$
Poser $y = \alpha$ et $z = \alpha'$.
4. Ecrire le code qui définit les deux fonctions $f1$ et $g1$.
5. Résoudre numériquement l'équation différentielle avec la méthode d'Euler. Le schéma est le suivant :
Pour $k = 0$ à $k = n - 1$
$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$y_{k+1} = y_k + hf1(y_k, y_k)$$
$$z_{k+1} = z_k + hf2(y_k, y_k)$$
Tracer le diagramme de phase.

Exercice 10

Pour étudier la propagation dans le temps d'une épidémie, nous considérons le modèle suivant où S représente les individus sains qui peuvent être contaminés et I ceux qui sont infectés et peuvent transmettre.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S'(t) & = & -rS(t)I(t) \\ I'(t) & = & rS(t)I(t) - aI(t) \end{array} \right.$$

avec $S(0) = S_0$ et $I(0) = I_0$; a et r sont des constantes qui caractérisent l'épidémie, t est la variable représentant le temps en jours.

Schéma :

$$t_{k+1} = t_k + h$$
$$S_{k+1} = S_k - hrS_kI_k$$
$$I_{k+1} = I_k + hrS_kI_k - aI_k$$

Résoudre numériquement le problème avec $r = 2,5.10^{-3}$, $a = 0,32$ $S_0 = 500$, $I_0 = 1$, $n = 30$, le nombre de pas. Tracer les courbes représentant l'évolution de S et de I.

Exercice 11

Les équations de Lotka-Volterra sont utilisées pour modéliser l'évolution d'un système appelé "proie-prédateur". Si $x(t)$ est l'effectif des proies en fonction du temps et $y(t)$ l'effectif des prédateurs en fonction du temps, le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) & = & -cy(t) + dx(t)y(t) \end{array} \right.$$

Les coefficients a et d sont les taux de reproduction respectifs des proies et des prédateurs, b et c sont les taux de mortalité respectifs des proies et des prédateurs. Nous choisissons les constantes $a = 0.5$, $b = 0.6$, $c = 0.5$, $d = 0.4$ définies au début du programme.

1. Ecrire une fonction **LV(x0, y0, n, dt)** qui renvoie trois listes contenant les valeurs t_k, x_k, y_k obtenues avec le schéma d'Euler.
Pour k variant de 0 à $n - 1$:
$$t_{k+1} = t_k + dt$$
$$x_{k+1} = x_k + dt(ax_k - bx_ky_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + dt(-cy_k + dx_ky_k)$$
2. Les conditions initiales sont x0 = 0.85 et y0 = 1.25. Tracer les courbes paramétrées, ensembles des points $(x(t); y(t))$, avec $n = 500$ et $dt = 0.1$ puis avec avec $n = 5000$ et $dt = 0.01$ et enfin avec $n = 50000$ et $dt = 0.001$.
La courbe est fermée dans le dernier cas qui nécessite de nombreux calculs.

3. Si nous posons $u = (x, y)$, alors le système d'équations s'écrit : $u' = f(u)$. Ecrire la définition de la fonction f et reprendre la question 1 en utilisant le schéma de Runge-Kutta RK4. Utiliser les tableaux numpy.ndarray.

   Vérifier que la courbe obtenue est fermée avec les paramètres $n = 500$ et $dt = 0.1$.

4. Tracer alors les courbes paramétrées $(x(t); y(t)$, avec les différentes conditions initiales $x0 = 0.85 + 0.1u$, $y0 = 1.25 + 0.1u$ avec $0 \leq u \leq 21$. Prendre $n = 200$ et $dt = 0.1$.

5. Tracer les deux courbes représentant respectivement x et y en fonction de t.

   Prendre $n = 500$, $dt = 0.1$, $x0 = 0.85$ et $y0 = 1.25$.

6. Nous écrivons l'équation différentielle sous la forme $y'(x) = f(x, y)$. Soit : $y'(x) = \dfrac{y(-c + dx)}{x(a - by)}$.

   Ici, y est considérée comme fonction de x. Résoudre numériquement cette équation avec le schéma de Runge-Kutta RK4. Tracer alors la courbe représentant y en fonction de x.